Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte) Sei $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen.

(i) Sei $X := [0,3) \subset \mathbb{R}$ und versehe X mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Welche der folgenden Mengen sind in X offen, welche sind abgeschlossen?

	$[0,1)$	$[0,1]$	$[2,3)$	$(2,3)$	$[1,2)$	$[0,3)$	$(1,2)$	$[1,2]$
offen								
abgeschlossen								

(ii) Sei $Y := (0,1] \subset \mathbb{R}$ und versehe Y mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie. Bestimme alle Teilmengen von Y, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte + *zusätzlich 2 Punkte*)
Sei $\mathcal{O}_1$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, $\mathcal{O}_2$ bestehe genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}_3$ bestehe genau aus $\emptyset$, $\mathbb{R}$ und allen Intervallen der Form $(-\infty, a]$ mit $a \in \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{B}_1 = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, sei $\mathcal{B}_2 := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ und sei $\mathcal{B}_3 := \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}$.

(i) Überprüfe zunächst, welche der $\mathcal{O}_i$ Topologien auf $\mathbb{R}$ sind. Sei $A \subset \{1,2,3\}$ die maximale Teilmenge, so dass $\mathcal{O}_i$ für $i \in A$ eine Topologie ist.
(ii) Überprüfe für jedes $\mathcal{B}_i$, $i \in A$, ob es eine Basis der Topologie $\mathcal{O}_i$ auf $\mathbb{R}$ ist.
(iii) Seien $i, j \in A$ beliebig. Überprüfe, ob $\mathcal{O}_i$ gröber oder feiner ist als $\mathcal{O}_j$.
(iv) *Zusatz:* Sei $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen. Sei $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie versehen. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)
Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) $\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} : a \in B_\delta(x) \Longrightarrow f(a) \in B_\varepsilon(f(x))$.
(ii) $f^{-1}(B)$ ist offen für alle offenen Mengen $B \subset Y$.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Überprüfe bei den folgenden Aussagen, welche äquivalent zur Stetigkeit von f ist (mit Beweis beziehungsweise Angabe eines Gegenbeispiels):

(i) $f(A)$ ist offen für alle offenen Mengen $A \subset X$.
(ii) $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $B \subset Y$.
(iii) $f(A)$ ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset X$.
(iv) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ auch $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 24.04.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.