Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2012
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

(i) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $Y \subset X$. Zeige, dass Y genau dann abgeschlossen ist, wenn Y mit der von (X, d) induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist.
(ii) Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $K \subset X$ abgeschlossen. Dann ist K kompakt.
(iii) Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ mit der induzierten Topologie versehen. Zeige, dass eine Menge $K \subset Y$ genau dann in Y kompakt ist, wenn sie in X kompakt ist.
(iv) Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von X, d.h. es gilt $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$$
gilt.

Aufgabe 2.2. (4 + 2 Punkte)

(i) Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $K, L \subset X$. Sei K kompakt, L abgeschlossen und gelte $K \cap L = \emptyset$. Zeige, dass $d(K, L) > 0$ ist, wobei
$$d(K, L) := \inf_{x\in K, y\in L} d(x, y)$$
sei.
(ii) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und d die euklidische Metrik. Gib zwei abgeschlossene Mengen $K, L \subset X$ mit $K \cap L = \emptyset$ an, welche $d(K, L) = 0$ erfüllen.
(iii) *Zusatz:* Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorffraumes X. Zeige, dass es disjunkte offene Mengen Ω_1, Ω_2 in X mit $K_1 \subset \Omega_1$, $K_2 \subset \Omega_2$ gibt.

Aufgabe 2.3. (4 + 2 Punkte)
Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein Unterraum. Untersuche, ob U in X abgeschlossen oder dicht ist, wobei wir X und U jeweils wie folgt wählen:

(i) Sei $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, und sei U_k, $0 \le k \le n$, ein beliebiger k-dimensionaler Unterraum von X.
(ii) Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und sei $X_p = (C^0([-a, a]), \|\cdot\|_{L^p([-a,a])})$, $p \in \{1, \infty\}$, und $U = \{u \in C^0([-a, a]) : u(0) = 0\}$.
(iii) Sei $X = l^2(\mathbb{N})$ und sei $U := \{(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}) : \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge n_0 : x^n = 0\}$.
(iv) *Zusatz:* Sei $X = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^2([0,1])})$, wobei $\|\cdot\|_{L^2([0,1])}$ die vom Skalarprodukt aus Bemerkung 6.1.2 (v), Skript zur Linearen Algebra I, induzierte Norm ist. Sei $g \in X$ mit $\|g\|_{L^2([0,1])} = 1$. Sei
$$U := \left\{ f \in X : \int_0^1 f \cdot g = 0 \right\}.$$

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)
Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $C^0(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} : \text{ f ist stetig auf } X\}$. Auf $C^0(X, \mathbb{R})$ definieren wir eine Metrik d_∞ mittels $d_\infty(f, g) := ||f - g||_{L^\infty(X)}$. Zeige, dass $(C^0(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Mittwoch, 02.05.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.