Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (4 + *zusätzlich 2* Punkte)

(i) Sei X ein normierter Raum und sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung. Sei $A := \{x \in X : f(x) = x\}$. Ist A abgeschlossen?
Zusatz: Gilt die Aussage auch, falls X nur ein Hausdorffraum ist?

(ii) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, welche für $x \neq y \in X$
$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$
erfüllt. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt, d. h. es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Aufgabe 3.2. (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir
$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$
Sei $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : ||f||_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty\}$, wobei $||f||_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := ||f||_{C^0(\Omega)} + [f]_{C^\alpha(\Omega)}$ ist.

(i) Sei Ω offen. Zeige, dass $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega})$ ist.

(ii) Sei Ω offen. Zeige, dass $(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), ||.||_{C^{0,\alpha}(\Omega)})$ ein Banachraum ist.

(iii) Sei Ω offen und beschränkt. Zeige, dass eine beschränkte Teilmenge $A \subset (C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), ||.||_{C^{0,\alpha}(\Omega)})$ präkompakt in $(C^0(\bar{\Omega}), ||.||_{C^0(\Omega)})$ ist.

(iv) Sei Ω offen und beschränkt. Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta < \alpha$. Zeige, dass beschränkte Mengen in $(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), ||.||_{C^{0,\alpha}(\Omega)})$ präkompakt in $(C^{0,\beta}(\bar{\Omega}), ||.||_{C^{0,\beta}(\Omega)})$ sind.

Aufgabe 3.3. (6 Punkte)

(i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}_+$. Für $x \in C([0, \infty))$ definieren wir $\|x\|_\alpha := \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t}|x(t)|$ und
$$X_\alpha := \{x \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n) : \|x\|_\alpha < \infty\}.$$
Zeige, dass $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ ein Banachraum ist.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine gleichmäßig Lipschitz stetige Abbildung, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Zeige, dass die Differentialgleichung
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ für } t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$
genau eine Lösung $x \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ besitzt.
Hinweis: Wende den Banachschen Fixpunktsatz auf die Abbildung
$$A : (X_\alpha, d) \to (X_\alpha, d), \quad x \mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)$$
an. Zeige hierfür insbesondere, dass
a) A eine Selbstabbildung ist, d. h. für $x \in X_\alpha$ ist $Ax \in X_\alpha$,
b) A eine strikte Kontraktion ist, d. h. es gibt ein $0 < c < 1$, so dass für $x, y \in X_\alpha$ die Ungleichung $\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|$ gilt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 08.05.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.