Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Sei Ω ein Maßraum mit Maß μ. Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und seien $1 < p_i < \infty$, $1 \le i \le n$, mit $\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$. Seien $f_i \in L^{p_i}(\Omega, \mu)$, $1 \le i \le n$. Zeige, dass

$$\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^n f_i \right| \mathrm{d}\mu \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega,\mu)}$$

gilt.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei Ω ein nicht-trivialer, beschränkter Maßraum mit Maß μ, d. h. $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Wir definieren für $1 \le p < \infty$

$$\Psi_p : L^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(\mathrm{x}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir setzen Ψ_p auf den Raum der μ-meßbaren Funktionen fort, indem wir $\Phi_p(f) := \infty$ für $f \notin L^p(\Omega, \mu)$ setzen. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine μ-meßbare Funktion. Die Funktion $p \mapsto \Psi_p(f)$ ist monoton nichtfallend. Für $1 \le p \le q < \infty$ gilt also $L^q(\Omega, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu)$.

(ii) Sei $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$. Dann gilt

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega,\mu)} = \lim_{p\to\infty} \Psi_p(f) = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega,\mu)}.$$

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Wir sagen ein Banachraum X ist gleichmäßig konvex, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta$ bereits $\|x - y\| < \varepsilon$ gilt.

(i) Zeige, dass $L^1(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$ nicht gleichmäßig konvex sind.

(ii) Sei H ein Hilbertraum. Zeige, dass H gleichmäßig konvex ist.
Hinweis: Benutze die Parallelogrammgleichung, d.h. für $x, y \in H$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)
Sei Ω ein Maßraum mit Maß μ.

a) Sei $q \ge 1$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \le a, b$. Zeige, dass

$$a^q + b^q \le (a+b)^q$$

gilt.

b) Sei $p \in \mathbb{R}$, $2 \le p < \infty$. Seien $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. Zeige, dass

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} \le \frac{1}{2} \|f\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} + \frac{1}{2} \|g\|^p_{L^p(\Omega,\mu)}$$

gilt.
Hinweis: Verwende Teilaufgabe a) und die Konvexität der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^{\frac{p}{2}}$ für $p \ge 2$.

Dies zeigt, dass auch $L^p(\Omega, \mu)$ für $p \ge 2$ gleichmäßig konvex ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 15.05.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.