Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)
Berechne jeweils die Operatornormen der folgenden Operatoren:

(i) $E : L^2(K) \to L^1(K)$, $f \mapsto f$ mit kompakter Menge $K \subset \mathbb{R}^n$,
(ii) $S : l^1 \to l^2$, $x \mapsto x$,

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Wir bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass es zu $x_0 \in \partial\Omega$ ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$

$$\langle x - x_0, \xi \rangle \geq 0$$

gilt.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)
Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Die induzierte Norm ist gleichmäßig Lipschitz-stetig. Gib die Lipschitz-Konstante an.
(ii) Das Skalarprodukt ist stetig.
(iii) Seien $x, y \in H$ und $x \neq 0$. Dann gilt $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow y = lx, l \geq 0$.
(iv) Seien $x, y \in H \setminus \{0\}$ mit $x \neq y$ und sei $0 < t < 1$. Dann gilt $\|tx + (1-t)y\|^2 < t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2$ d.h. $\|\cdot\|^2$ ist strikt konvex.

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seien $1 < p, p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sei $e_i := (\delta_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Abbildung

$$A : (l^p(\mathbb{N}))^* \to l^{p'}(\mathbb{N}), \quad \varphi \mapsto y = (y^i)_{i \in \mathbb{N}} := (\langle e^i, \varphi \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$$

folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) A ist linear.
(ii) A ist wohldefiniert, d. h. für $\varphi \in (l^p(\mathbb{N}))^*$ ist $A\varphi \in l^{p'}(\mathbb{N})$,
(iii) A ist normerhaltend, d. h. für $\varphi \in (l^p(\mathbb{N}))^*$ gilt $\|\varphi\|_{(l^p(\mathbb{N}))^*} = \|A\varphi\|_{l^{p'}(\mathbb{N})}$.
(iv) A ist bijektiv.

A ist also ein isometrischer Isomorphismus zwischen $(l^p(\mathbb{N}))^*$ und $l^{p'}(\mathbb{N})$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 22.05.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.