Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2012
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir sagen Y *spaltet* X, falls es einen abgeschlossenen Unterraum $Z \subset X$ mit $Y \oplus Z = X$ und eine Konstante $c > 0$ mit

$$\frac{1}{c}\|x+y\| \le \max(\|x\|, \|y\|) \le c\|x+y\| \quad \forall\,(x,y) \in Y \times Z$$

gibt. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $P \in L(X)$ mit $P^2 = P$. Dann gilt $X = R(P) \oplus N(P)$.
(ii) Y spaltet genau dann X, wenn es ein $P \in L(X)$ mit $P^2 = P$ und $R(P) = Y$ gibt.
(iii) Y spaltet X, falls $\dim Y < \infty$.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Sei $H = l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N})$ mit Skalarprodukt $\langle (x,y),(a,b)\rangle := \langle x,a\rangle_{l^2(\mathbb{N})} + \langle y,b\rangle_{l^2(\mathbb{N})}$. Seien

$$A := \left\{\left(n^2 e_n, e_0 + \tfrac{1}{n}e_n\right) : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{\left(-n^2 e_n, e_0 + \tfrac{1}{n}e_n\right) : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}.$$

Wir definieren Unterräume von H durch $U := \langle A\rangle$ und $V := \langle B\rangle$.

(i) Zeige, dass

$$\bar{U} = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \lambda^n \left(n^2 e_n, e_0 + \frac{1}{n}e_n\right) : \lambda^n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ mit } \sum_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \left(\lambda^n n^2\right)^2 < \infty\right\}$$

gilt. Gib eine analoge Darstellung für $\bar{V}$ an.
(ii) Zeige, dass $\overline{\bar{U} + \bar{V}} = \overline{U+V}$ ist.
(iii) Zeige, dass $(0, e_0) \in \overline{U+V}$ ist.
(iv) Zeige, dass $(0, e_0) \notin \bar{U} + \bar{V}$ ist.

Folglich gibt es in unendlich dimensionalen Hilberträumen H abgeschlossene Unterräume X, Y mit $X + Y \neq \overline{X+Y}$.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Sei $\varphi \in H^*$. Wir definieren $J : H \to \mathbb{R}$ mittels $x \mapsto \langle x,x\rangle - 2\varphi(x)$. Zeige, dass es genau ein $x \in H$ gibt, so dass

$$J(x) \le J(y) \quad \forall\, y \in H$$

gilt.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)
Sei B eine stetige Sesquilinearform auf einem Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d. h. $B : H \times H \to \mathbb{C}$ erfüllt für alle $x, y, z \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x,y) + \beta B(x,z)$$

und

$$B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x,z) + \bar{\beta} B(y,z).$$

Zeige, dass es eine eindeutige beschränkte lineare Abbildung $A : H \to H$ gibt, so dass $B(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt. Zeige, dass $\|A\| = \|B\|$ gilt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 29.05.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.