Oliver Schnürer,
Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)

(i) Sei
$$\mathcal{C} := \{x = (x^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{i\to\infty} x^i \text{ existiert}\}.$$
Man mache sich klar, dass $\mathcal{C}$ ein Unterraum von $l^\infty(\mathbb{N})$ ist.

(ii) Zeige, dass es ein $\varphi \in (l^\infty(\mathbb{N}))^*$ gibt, so dass es für alle $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ ein $x \in l^\infty(\mathbb{N})$ mit $\varphi(x) \neq \langle x, y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i y_i$ gibt. Es folgt also $l^1(\mathbb{N}) \subsetneq (l^\infty(\mathbb{N}))^*$.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Sei X ein normierter Raum und bezeichne mit $B := B_1(0)$ die Einheitskugel in X. Zeige, dass X endlich-dimensional ist, falls $\bar{B}$ kompakt ist.
Hinweis: Überdecke die Einheitskugel mit endlich vielen Kugeln $B_{\frac{1}{2}}(x_i)$, $1 \le i \le m$, für ein $m \in \mathbb{N}$ und zeige, dass $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = X$ gilt.

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)

(i) Seien X, Y und Z Banachräume. Sei $B : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung, für die sowohl $x \mapsto B(x, y)$, als auch $y \mapsto B(x, y)$ stetig für alle $x \in X$ und $y \in Y$ sind. Zeige, dass B stetig ist.

(ii) Seien X, Y unendlich-dimensionale Banachräume und sei $A \in L(X, Y)$ ein kompakter Operator, d. h. A bildet beschränkte Teilmengen von X auf relativ kompakte Teilmengen von Y ab. Zeige, dass A nicht surjektiv ist.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei H ein Hilbertraum und sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $\pi : H \to H/M$, $x \mapsto [x]$ die Projektion auf H/M, wobei wir H/M mit der Norm aus Theorem 2.1.5 versehen. Zeige, dass die Abbildung
$$\pi_{|M^\perp} : M^\perp \to H/M, \quad x \mapsto \pi(x),$$
ein Isomorphismus ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 05.06.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.