Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

(i) Zeige, dass es eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \eta \subset B_1(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda = 1$ und $\eta \geq 0$ gibt.
Bemerkung: Eine Funktion mit diesen Eigenschaften nennen wir eine *Friedrichsche Glättungsfunktion.*

(ii) Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion. Wir definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die zugehörige Diracfolge $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Zeige, dass $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0))$ ist und $\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon d\lambda = 1$ erfüllt.

Aufgabe 9.2. (8 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion und η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir setzen f mit Null auf das Komplement von Ω fort und definieren für beliebige $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy$.

Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ eine Nullfolge und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω und sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich stetig auf Ω. Dann gilt $f_{\varepsilon_n} \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$ auf K.

(iii) Es gilt $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset B_\varepsilon(\operatorname{supp} f) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \inf\limits_{y \in \operatorname{supp} f} |x-y| < \varepsilon\right\}$.

(iv) Sei $m \in \mathbb{N}_+$ und sei in dieser Teilaufgabe f noch zusätzlich von der Klasse $C^m(\Omega)$. Sei $x \in \Omega$. Falls $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt, dann ist $D^\alpha f_\varepsilon(x) = (D^\alpha f)_\varepsilon(x)$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$.
Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$ offen, dann gilt $\|f_{\varepsilon_n} - f\|_{C^m(\Omega')} \to 0$ für $n \to \infty$.

(v) Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\|f_{\varepsilon_n} - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ für $n \to \infty$.

(vi) Gelte nun $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)
Lese und verstehe den Beweis der Existenz einer Partition der Eins auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 19.06.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.