Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Seien $(B_1, \|\cdot\|_{B_1}), (B_2, \|\cdot\|_{B_2}), (B_3, \|\cdot\|_{B_3})$ drei Banachräume, so dass

$$B_1 \underset{i}{\hookrightarrow} B_2 \underset{j}{\hookrightarrow} B_3$$

gilt, wobei $i : B_1 \to B_2$ eine kompakte und $j : B_2 \to B_3$ eine stetige Einbettung sei. Zeige, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $u \in B_1$ die Ungleichung

$$\|i(u)\|_{B_2} \le \varepsilon \|u\|_{B_1} + c_\varepsilon \|j \circ i(u)\|_{B_3}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei $1 < p < \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass $W^{k,p}(\Omega)$ reflexiv ist.

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und bezeichne mit $B_1(0)$ den offenen Einheitsball im $\mathbb{R}^n$. Sei

$$u : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right).$$

Zeige, dass $u \in W^{1,n}(B_1(0))$ gilt.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $A : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Wir sagen A ist eine *Distribution* auf Ω, falls es für alle offenen Mengen $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine Konstante $c_{\Omega'} > 0$ und ein $m_{\Omega'} \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\eta) \subset \Omega'$

$$|A(\eta)| \le c_{\Omega'} \|\eta\|_{C^{m_{\Omega'}}(\overline{\Omega'})}$$

gibt. Ist A eine Distribution und α ein Multiindex, so definieren wir die *Distributionsableitung* von A als lineare Abbildung $D^\alpha A : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, indem wir für $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$

$$(D^\alpha A)(\eta) := (-1)^{|\alpha|} A(D^\alpha \eta)$$

definieren.
Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, mittels

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

definiert. Sei weiterhin $A : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\eta \mapsto \int_\Omega f \cdot \eta$. Zeige, dass A eine Distribution auf Ω ist und berechne die erste und die zweite Distributionsableitung.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 26.06.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.