Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2012

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha \le 1$. Zeige, dass $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ein Banachraum ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $0 < \alpha \le 1$. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c_\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ die Ungleichung

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \le \varepsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + c_\varepsilon \|u\|_{C^0(\Omega)}$$

gilt.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)
Beweise Theorem 8.2.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 11.3. (6 Punkte)

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeige, dass die Inklusion $C^{0,1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$ eine wohldefinierte, stetige Einbettung ist.
Hinweis: Betrachte eine Ausschöpfung $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen Ω_n mit $\Omega_n \subset\subset \Omega$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Differenzenquotienten von u gleichmäßig in Ω_n in jeder L^p-Norm für $1 < p < \infty$ beschränkt sind und verwende Aufgabe 4.2.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex. Definiere die Abbildung $i : W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $[u] \mapsto u$, wobei u ein stetiger Repräsentant von $[u]$ sei. Zeige, dass i eine wohldefinierte, stetige Abbildung ist.

Aufgabe 11.4. (2 Punkte)
Beweise die Bemerkung 9.1.3 aus der Vorlesung.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen12.html#FA`
Abgabe: Bis Dienstag, 03.07.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.