Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Prüfen Sie, für welche $y \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x^1 & + & 4x^2 & + & 2x^3 & = & -12y^2 \\ x^1 & + & 10x^2 & + & 6x^3 & = & -7y^2+2y+8 \\ 2x^1 & + & 12x^2 & + & 7x^3 & = & -12y^2+5y+9 \end{array}$$

Falls eine Lösung existiert, ist diese eindeutig?
Bemerkung: Es darf verwendet werden, dass die Gleichung $(y-\lambda_1)\cdot(y-\lambda_2)=0$ für $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ genau $y=\lambda_1$ und $y=\lambda_2$ als Lösungen besitzt.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei Funktionen, wobei $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien.
Seien $a, b \in \mathbb{R}^m$ und sei $A_a = \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n : f(x^1,\ldots,x^n) = a\}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x^1,\ldots,x^n) = a \tag{1}$$

und $B_b = \{(x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{R}^n : g(x^1,\ldots,x^n) = b\}$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$g(x^1,\ldots,x^n) = b. \tag{2}$$

a) Sei zunächst $m = 1$. Geben Sie zwei Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ an, so dass
   (i) $\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = 0\} = A_a \cup B_b$ und
   (ii) $\{x \in \mathbb{R}^n : \Psi(x) = 0 \equiv (0,0)\} = A_a \cap B_b$.
b) Nennen Sie allgemeine Bedingungen an die Funktion f, so dass die Gleichung (1) für jedes $a \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist beziehungsweise jede Lösung der Gleichung eindeutig ist.
c) Nun sei f eine lineare Funktion, d.h. für beliebige $(x^1,\ldots,x^n), (y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte

$$f(\lambda x^1,\ldots,\lambda x^n) = \lambda f(x^1,\ldots,x^n),$$
$$f(x^1,\ldots,x^n) + f(y^1,\ldots,y^n) = f(x^1+y^1,\ldots,x^n+y^n).$$

Was für eine Gleichung ist nun durch (1) gegeben?
Sei $n = m$. Formulieren Sie nun eine zur allgemeinen Bedingung an f in Teilaufgabe b) äquivalente Bedingung für die Eindeutigkeit einer Lösung der Gleichung (1).

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)
Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Seien $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv. Zeigen Sie, dass dann auch f, g und h bijektiv sind.

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)

a) Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Wir definieren die Projektion auf die zweite Komponente durch $\pi_2 : A \times B \to B$, $(a, b) \mapsto b$. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn für alle $y \in B$ die Menge $\pi_2^{-1}(\{y\}) \cap$ graph f maximal ein Element enthält.

b) Seien f und π_2 wie in Teilaufgabe a) gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $\pi_2(\text{graph } f) = B$ gilt.

c) Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen.
Wir definieren die folgenden Projektionen:

$$\begin{aligned} \pi_{12} : A \times B \times C \to A \times B, &\quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \\ \pi_{23} : A \times B \times C \to B \times C, &\quad (x, y, z) \mapsto (y, z), \\ \pi_{13} : A \times B \times C \to A \times C, &\quad (x, y, z) \mapsto (x, z). \end{aligned}$$

Sei nun $G = \pi_{12}^{-1}$ (graph f) $\cap\ \pi_{23}^{-1}$ (graph g). Zeigen Sie, dass dann

$$\text{graph } (g \circ f) = \pi_{13}(G)$$

gilt.

Aufgabe 2.5. (Zusatzaufgabe: 6 Punkte)
Seien zwei Mengen A, B und eine Abbildung $f : A \to B$ gegeben. Wir definieren

$$\text{im}(f) := f(A) = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Zeigen Sie, dass 6 der folgenden Aussagen äquivalent sind (eine ist es nicht, welche?):

(i) f ist injektiv.
(ii) Für alle $C \subset A$ gilt $f^{-1}\big(f(C)\big) = C$.
(iii) Für alle $C, D \subset A$ gilt $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
(iv) Für alle $C, D \subset A$ mit $C \cap D = \emptyset$ gilt $f(C) \cap f(D) = \emptyset$.
(v) Für alle Mengen C, D mit $C \subset D \subset A$ gilt $f(D \setminus C) = f(D) \setminus f(C)$.
(vi) Es gibt eine Abbildung $g : \text{im}(f) \to A$ mit $f \circ g = \text{Id}_{\text{im}\, f}$.
(vii) Es gibt eine Abbildung $g : \text{im}(f) \to A$ mit $g \circ f = \text{Id}_A$.

Abgabe: Bis Dienstag, 02.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.