Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)

Eine Menge G mit einer Verknüpfung „$\cdot$“ bezeichnet man als Gruppe, wenn sie die Bedingungen (F6), (F7) und (F8) aus der Definition 2.1.1 (ohne die Eindeutigkeitsforderung an die Inverse) erfüllt. Eine Gruppe heißt abelsch, wenn auch (F5) erfüllt ist.

Mit dieser Definition sieht man leicht ein, dass eine Menge F mit einer Addition „$+$“ und einer Multiplikation „$\cdot$“ genau dann ein Körper ist, wenn $(F,+)$ und $(F\setminus\{0\},\cdot\,)$ abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz (F9) erfüllt ist.

Sei nun G eine Gruppe.

(i) Weisen Sie nach, dass das neutrale Element $1 \in G$ eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaft $1 \cdot a = a$ für alle $a \in G$ erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass auch das inverse Element a^{-1} für jedes $a \in G$ eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaft $a^{-1} \cdot a = 1$ erfüllt.

(iii) Ein Nullteiler A in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ein von Null verschiedenes Element $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches es ein von Null verschiedenes Element $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot B = 0$ oder $B \cdot A = 0$ gibt. Geben Sie ein Beispiel für einen Nullteiler in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an.
Finden Sie unter den Bedingungen (F1)-(F9) zwei, welche für die reellen (2×2)-Matrizen mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation verletzt sind.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)

(i) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Gelte $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass A eine Rechtsinverse bezüglich der Matrixmultiplikation besitzt, d.h. dass es ein Element $A_R^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot A_R^{-1} = I$ gibt. Die Rechtsinverse ist dann durch die folgende Formel gegeben:

$$A_R^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die folgende Menge eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation ist:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

(iii) Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Körper bezüglich der Matrixaddition und der Matrixmultiplikation ist.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$ einen Körper bildet, wobei wir die Addition und die Multiplikation von $\mathbb{R}$ verwenden:

$$\mathbb{Q}\big[\sqrt{3}\big] := \big\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\big\}.$$

Bemerkung: Es darf verwendet werden, dass $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper sind, dass $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist und dass $\sqrt{3}^2 = 3$ gilt.

Aufgabe 3.4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A = \left(a^i_j\right) \in K^{m \times m}$, $m \in \mathbb{N}^+$. Wir definieren die Spur (englisch: *trace*) von A mittels

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a^i_i.$$

Seien nun $A, B, C \in K^{m \times m}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gültig sind:

(i) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
(ii) $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$.
(iii) Es gibt m, K und Matrizen A, B, C, so dass $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(CBA)$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 09.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.