Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Sei F ein Körper und $m \in \mathbb{N}^+$. Sei $A \in F^{m\times m}$ und sei $I \in F^{m\times m}$ die Einheitsmatrix. Wir setzen $A^0 := I$, $A^1 := A$ und $A^{k+1} := A \cdot A^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $N = \left(a^i_j\right) \in F^{m\times m}$ eine Matrix mit $a^i_j = 0$ für $i \ge j$. Zeigen Sie, dass $N^m = 0$ gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass für $A \in F^{m\times m}$ und beliebige $n \in \mathbb{N}$
$$(I - A) \cdot \left(I + A + A^2 + \ldots + A^n\right) \equiv (I - A) \cdot \sum_{i=0}^{n} A^i = I - A^{n+1}$$
und
$$\left(\sum_{i=0}^{n} A^i\right) \cdot (I - A) = I - A^{n+1}$$
gelten.
(iii) Eine Matrix $N \in F^{m\times m}$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N^n = 0$ gibt. Zeigen Sie, dass die Matrix $D = I - N$ für eine beliebige nilpotente Matrix N invertierbar ist, d.h. dass es ein $C \in F^{m\times m}$ mit $DC = CD = I$ gibt.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei für $p \in \mathbb{N}^+$ die Menge $\mathbb{Z}/(p) := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wie in Beispiel 2.1.2 aus der Vorlesung definiert. Die Addition und die Multiplikation auf dieser Menge seien ebenfalls wie in diesem Beispiel definiert. Beweisen Sie nun folgende Aussagen:

a) $(\mathbb{Z}/(p), +)$ ist eine abelsche Gruppe. Man nennt diese Gruppe eine *zyklische Gruppe der Ordnung* p.
b) $\mathbb{Z}/(p)$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn p eine Primzahl ist. Hierbei bezeichnen wir $\mathbb{Z}/(p)$ als nullteilerfrei, wenn für alle $a, b \in \mathbb{Z}/(p)$ mit $a \cdot b = 0$ bereits $a = 0$ oder $b = 0$ folgt.
c) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}/(p)$ ein Körper. Man bezeichnet diesen Körper mit $\mathbb{F}_p$.

Bemerkung: Sie dürfen folgende Aussagen über Primzahlen verwenden:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann teilt a die Zahl b, $a|b$, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot n = b$ gibt.
(ii) Eine Zahl p heißt *Primzahl*, wenn $p \in \mathbb{N}$ und $p \ge 2$ gelten und wenn für beliebige $a \in \mathbb{N}$ aus $a|p$ bereits $a = 1$ oder $a = p$ folgt.
(iii) Sei $a \in \mathbb{N}$, $a \ge 2$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}^+$ und eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1 \le \ldots \le p_n$ mit $a = p_1 \cdots p_n$.
(iv) Seien $a, b, p \in \mathbb{N}$ und sei p eine Primzahl. Dann folgt aus $p|(a \cdot b)$ bereits $p|a$ oder $p|b$.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie, dass dann A/$\sim$ eine Partition von A ist.

Aufgabe 4.4. (4 Punkte)
a) Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper und $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass durch $a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in U$ eine Äquivalenzrelation definiert wird, welche wir im Folgenden als Kongruenz modulo U bezeichnen.
b) Seien $a, b \in V$ und $\lambda \in F$ beliebig. Wir definieren die Addition zweier Äquivalenzklassen $[a], [b]$ durch $[a] + [b] := [a + b]$ und die Skalarmultiplikation durch $\lambda \cdot [a] := [\lambda \cdot a]$. Zeigen Sie, dass dann $V/U := V/\sim$ ein Vektorraum über F ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 16.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.