Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

a) Sei $F = \mathbb{F}_5$. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}.$$
Berechnen Sie die additive Inverse von A.

b) Sei $F = \mathbb{F}_5$. Berechnen Sie mittels Aufgabe 4.1 die multiplikative Inverse der Matrix A.

c) Sei F ein Körper. Ein Polynom $p \in F[X]$ mit $\deg(p) > 0$ heißt irreduzibel über F, falls aus $p = f \cdot g$ mit $f, g \in F[X]$ bereits $\deg(f) = 0$ oder $\deg(g) = 0$ folgt. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 + 1$

(i) nicht irreduzibel über $\mathbb{F}_2$, aber
(ii) irreduzibel über $\mathbb{F}_3$ ist.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper. Seien $W_1, \ldots, W_p$ Unterräume von V und $W := W_1 + \ldots + W_p$. Dann heißt W die direkte Summe der W_i, wenn für $i \in \{1, \ldots, p\}$ gilt, dass $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{0\}$ ist. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) W ist die direkte Summe der W_i.
(ii) Für beliebige $a_i \in W_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$, welche $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ erfüllen, folgt bereits $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)

Sei V ein F-Vektorraum, F ein Körper und seien $S, T \subset V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\langle S \rangle = \langle T \rangle$ genau dann, wenn jedes $s \in S$ sich als Linearkombination von Vektoren aus T und jedes $t \in T$ sich als Linearkombination von Vektoren aus S darstellen lässt.

b) Es gilt $\langle S \rangle + \langle T \rangle = \langle S \cup T \rangle$.

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)

a) Eine Teilmenge $H \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^+$, bezeichnen wir als Gerade, falls es $c, d \in \mathbb{R}^n$ mit $H = \{c + td : t \in \mathbb{R}\}$ und $d \neq 0$ gibt. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^+$ und sei $G := \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie: Die Menge G beschreibt genau dann eine Gerade, welche nicht den Ursprung 0 enthält, wenn die Familie $\{a, b\}$ linear unabhängig ist.

b) Sei F ein Körper und seien $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in F^2$.
Zeigen Sie, dass die Familie $\{v, w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $ad - bc = 0$ gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 23.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.