Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

a) Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}^4$. Sei $S := \{(1,1,1,1),(2,-4,11,2),(0,2,-3,0)\}$. Prüfen Sie, ob S in V linear unabhängig ist und geben Sie eine Teilmenge von S an, die eine Basis von $\langle S\rangle$ ist.
b) Ergänzen Sie die Menge $\{(1,1,1,1),(0,2,-3,0)\}$ zu einer Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$.
c) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^2$. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $S_x := \{(1+i, 1-i),(x, xi)\}$. Gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, so dass S_x in V linear unabhängig ist? Wenn ja, geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, für welche dies erfüllt ist.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)

a) Sei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$. Sei V ein K-Vektorraum. Seien $u, v, w \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch $u+v$, $u+w$, $v+w$ linear unabhängig sind.
b) Sei nun $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$ und seien $x, y, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass $\{(x,y,0),(x,0,z),(0,y,z)\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: Als die Charakteristik eines Körpers K bezeichnet man die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}^+$, so dass $n := n \cdot 1 \equiv 1 + \ldots + 1 = 0$ gilt. Gibt es kein solches n, so sagt man, K habe die Charakteristik 0.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)

In dieser Übungsaufgabe soll die Bemerkung nach Theorem 3.2.12 bewiesen werden, d.h. dass der Beweis von Theorem 3.2.12 für unendliche Erzeugendensysteme nicht funktioniert. Hierfür definieren wir die Mengen S_i für $i \in \mathbb{N}$ durch

$$S_i := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{e_k + e_i, e_k + e_{i+1}, e_k + e_{i+2}, ...\},$$

wobei $e_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch $e_i(m) := \begin{cases} 0, & m \neq i, \\ 1, & m = i, \end{cases}$ definiert ist. Weiterhin sei

$$W_i := \big\{(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : v_j = 0 \ \forall\, j < i\big\}.$$

Sei $T_i := S_i \cup W_i$. Zeigen Sie nun, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ zwar $T_{i+1} \subset T_i$ und $\langle T_i\rangle = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gelten, aber dass $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} T_i = \{0\}$ ist.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine Hyperebene des Vektorraums K^n, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, ist eine Menge

$$H := \Big\{(x^1, \ldots, x^n) \in K^n : \sum_{i=1}^n a_i x^i = 0\Big\},$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in K$ seien und es ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_{i_0} \neq 0$ gibt.

a) Sei H eine Hyperebene. Zeigen Sie, dass H ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von K^n ist.
b) Seien $H_1, \ldots, H_r$, $n \geq r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, Hyperebenen von K^n. Zeigen Sie, dass dann

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^r H_i\right) \geq n - r$$

gilt.

Abgabe: Bis Dienstag, 30.11.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.