Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei die Funktion $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ durch
$$(x^1,x^2,x^3,x^4)\mapsto(3x^1+x^2-x^3+x^4,-x^1+x^2+3x^3+x^4,4x^3+4x^4,-2x^2+6x^3+8x^4)$$
gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.
b) Sei $A=(a^i_j)\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ durch die Koeffizienten in $f(e_j)=\sum\limits_{i=1}^4 a^i_j e_i$ gegeben, wobei e_j den Einheitsvektor in die j-te Richtung des $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, $j\in\mathbb{N}$, $1\le j\le 4$. Geben Sie A explizit an.
c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.
d) Geben Sie eine Basis von $\ker(f):=\{v\in\mathbb{R}^4: f(v)=0\}$ und von $\operatorname{im}(f):=f(\mathbb{R}^4)$ an.

Aufgabe 7.2. (2 Punkte)
Sei $k\in\mathbb{N}^+$. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix des $\mathbb{R}^{k\times k}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 2 & 3 & \dots & k+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k+1 & \dots & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.3. (6 Punkte)
Sei F ein Körper, $n\in\mathbb{N}$, und bezeichne mit $F_n[X]$ die Menge der Polynome $p(X)\in F[X]$ mit $\deg p\le n$.

a) Begründen Sie kurz, warum $F[X]$ ein F-Vektorraum ist.
b) Zeigen Sie, dass $F_n[X]$ ein Unterraum von $F[X]$ ist.
c) Sei $W:=\{p(X)\in F_n[X]: p(0)=0=p(1)\}$. Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von $F_n[X]$ ist.
d) Geben Sie eine Basis B_1 von W an.
e) Sei $a\in F$. Zeigen Sie, dass die Polynome $h_0[X]:=1$ und $h_i[X]:=(X-a)^i$ für $i\in\mathbb{N}$, $1\le i\le n$, eine Basis B_2^a von $F_n[X]$ bilden.
f) Sei $n=4$ und $a\in F$ beliebig. Verfahren Sie wie beim Beweis des Austauschsatzes von Steinitz, um eine Basis B von $F_4[X]$ mit $B_1\subset B$ und $B\setminus B_1\subset B_2^a$ zu erhalten.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V\to W$ eine lineare Abbildung. Sei weiterhin $\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V und seien für $i\in\{1,\dots,n\}$ die Vektoren $w_i\in W$ durch $w_i:=\varphi(v_i)$ definiert.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) φ ist injektiv.
   (ii) $\{w_1,\dots,w_n\}$ ist linear unabhängig.
b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) φ ist surjektiv.
   (ii) $\{w_1,\dots,w_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.
c) Vergleichen Sie nun $\dim V$ und $\dim W$, falls φ injektiv beziehungsweise surjektiv ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 07.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.