Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (6 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Sei $A \in K^{n\times n}$ und sei A' eine Matrix, welche durch Anwenden einer elementaren Zeilenoperation auf A entstanden ist. Geben Sie für jede elementare Zeilenoperation eine Matrix $E \in K^{n\times n}$ an, so dass $A' = E \cdot A$ gilt.
b) Zeigen Sie nun, dass zu jeder Matrix $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix D existiert, so dass $D \cdot A$ Zeilenstufenform besitzt.
c) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann regulär ist, wenn sie sich durch elementare Zeilenoperationen auf die Form der Einheitsmatrix bringen läßt.
d) Begründen Sie nun die Richtigkeit des folgenden Verfahrens zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix $A \in K^{n\times n}$:
Man schreibe neben A die Einheitsmatrix $I \in K^{n\times n}$. Die so entstandene $(n \times 2n)$-Matrix $A\,|\,I$ bringe man durch elementare Zeilenoperationen auf die Form $I\,|\,B$. Dann gilt $B = A^{-1}$.

Aufgabe 8.2. (2 Punkte)
Prüfen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und geben Sie, falls möglich, die Inverse an:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)
Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $A \in \mathbb{F}_p^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es $r, s \in \mathbb{N}^+$ gibt, so dass

$$A^r = A^{r+s},\ A^{r+1} = A^{(r+1)+s},\ \ldots,\ A^{r+s-1} = A^{(r+s-1)+s}$$

gilt. Wir sagen dann, dass die Folge $I, A, A^2, \ldots$ periodisch wird.
Hinweis: Wie viele Elemente besitzt $\mathbb{F}_p^{n\times n}$?

Aufgabe 8.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $N \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix.

a) Zeigen Sie, dass N nicht invertierbar ist.
b) Zeigen Sie, dass bereits $N^n = 0$ gilt.

Hinweis: Sei m der Nilpotenz-Index von N, d.h. m ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass $N^m = 0$ gilt. Zeigen Sie in Aufgabenteil b) zunächst, dass $\ker N^0 \subset \ker N^1 \subset \ker N^2 \subset \ldots \subset \ker N^m$ eine echt aufsteigende Kette von Unterräumen ist, d.h. es gilt $\ker N^i \neq \ker N^{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m-1$.

Abgabe: Bis Dienstag, 14.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.