Oliver Schnürer, Matthias Makowski | Universität Konstanz | Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Bestimmen Sie Komplemente der folgenden Unterräume U_i der Vektorräume V_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le 4$:

(i) $V_1 = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \langle (1,2,3), (-2,4,1), (7,-2,7) \rangle$.
(ii) $V_2 = \mathbb{R}^4$, $U_2 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : 3x^1 - 2x^2 + x^3 + 2x^4 = 0\}$.
(iii) $V_3 = \mathbb{C}^4$, $U_3 = \langle (1, i, 1+i, 2), (2+4i, -5+i, 0, 2+6i), (0, 1, 2+4i, 2) \rangle$.
(iv) $V_4 = \mathbb{R}_4[X]$, $U_4 = \{p(X) \in V_4 : p(0) = p(1) = 0\}$.

Aufgabe 9.2. (4 Punkte)
Bestimmen Sie $I, A, A^2, \ldots$, d.h. A^k für alle $k \in \mathbb{N}$, für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{4\times 4}.$$

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)
Seien die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B := \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, C := \begin{pmatrix} 3+i & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1+i \\ 2-i & 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

gegeben, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ seien. Bestimmen Sie den Rang dieser Matrizen in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$. Falls die Matrix invertierbar ist, berechnen Sie die Inverse.

Aufgabe 9.4. (4 Punkte)
Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{F}_{11}^{11\times 11}$:

$$A := \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 3 & 0 & 0 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 3 & 0 & 0 \\
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 \\
10 & 1 & 2 & 8 & 7 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Stellen Sie das Ergebnis dar, indem Sie die Nullen durch Leerzeichen ersetzen und benennen Sie das sich ergebende geometrische Objekt!

Abgabe: Bis Dienstag, 21.12.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.