Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$. Zu einer Matrix $A = (a^i_j) \in V$ sei $A^T = (\tilde{a}^i_j) \in V$ die Transponierte der Matrix A, deren Einträge durch $\tilde{a}^i_j := a^j_i$ für $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le n$ gegeben sind.

a) Zeigen Sie, dass
$$U := \{A \in V : A = A^T\}$$
ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von U. Wir bezeichnen die Elemente von U auch als *symmetrische* Matrizen und schreiben $\operatorname{Sym}(n, K) := U$.
b) Mit $\operatorname{char} K$ bezeichnen wir die Charakteristik von K. Sei ab jetzt $\operatorname{char} K \ne 2$. Zeigen Sie, dass
$$W := \{A \in V : A = -A^T\}$$
ein Unterraum von V ist und bestimmen Sie eine Basis sowie die Dimension von W. Wir bezeichnen die Elemente von W auch als *antisymmetrische* Matrizen und schreiben $\operatorname{Alt}(n, K) := W$.
c) Zeigen Sie nun, dass $V = U \oplus W$ gilt.
d) Markieren Sie oben alle Stellen, an denen Sie $\operatorname{char} K \ne 2$ verwendet haben.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$. Sei $A \in V$.

a) Geben Sie eine explizite Zerlegung von A in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil an, d. h. geben Sie eine symmetrische Matrix $A_s \in V$ und eine antisymmetrische Matrix $A_a \in V$ mit $A = A_s + A_a$ an. Ist diese Zerlegung eindeutig?
b) Geben Sie eine explizite Zerlegung von A in einen spurfreien Anteil und einen Anteil mit derselben Spur wie A an, d. h. geben Sie zwei Matrizen $B, C \in V$ mit $\operatorname{tr}(B) = 0$, $\operatorname{tr}(C) = \operatorname{tr}(A)$ und $A = B + C$ an. Ist diese Zerlegung eindeutig?

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $V = K^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass $GL(n, K) := \{A \in V : A \text{ ist regulär}\}$ eine Gruppe bezüglich der Matrix-Multiplikation ist.
b) Zeigen Sie, dass $O(n, K) := \{A \in GL(n, K) : A^{-1} = A^T\}$ eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist. Für $K = \mathbb{R}$ bezeichnet man diese Gruppe als Gruppe der *orthogonalen* Matrizen.
c) Sei nun $K = \mathbb{C}$. Für eine Matrix $A = (a^i_j) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei die Matrix $\bar{A}$ durch $\bar{A} = \left(\overline{a^i_j}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert, wobei $\bar{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugierte Zahl bezeichnet. Zeigen Sie, dass $U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^{-1} = \bar{A}^T\}$ eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist. Diese Gruppe bezeichnet man als Gruppe der *unitären* Matrizen.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$, $V = K^{n\times n}$ und $A \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\operatorname{rang} A < n$.
(ii) A ist ein Links-Nullteiler in V, d. h. es gibt ein $B \in V$ mit $B \ne 0$ und $A \cdot B = 0$.
(iii) A ist ein Rechts-Nullteiler in V, d. h. es gibt ein $B \in V$ mit $B \ne 0$ und $B \cdot A = 0$.

Abgabe: Bis Dienstag, 11.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.