Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei $\mathbb{R}_n[X]$ der Vektorraum der Polynome $p(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ mit $\deg p \le n$. Sei

$$f_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad p \mapsto p'(X),$$

wobei $p'(X)$ die Ableitung von $p(X)$ bezeichnet, d. h. es gilt $p'(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot a_i X^{i-1}$. Weiterhin bezeichnen wir mit $B_n := (1, X, \ldots, X^n)$ die Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung f_n gehörige Matrix $A(n, n-1)$ bezüglich der Basen B_n und B_{n-1}.
b) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $g_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ mit $f_n \circ g_n = \mathrm{Id}$ gibt.
c) Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung g_n gehörige Matrix $C(n-1, n)$ bezüglich der Basen B_{n-1} und B_n.

Bemerkung: Sie dürfen die bekannten Resultate aus der Schule für die Ableitung und das Integral von Polynomen verwenden.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie, dass $V = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi$ gilt.
b) Seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $U \subset W$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass
$$\dim \varphi^{-1}(U) = \dim(U \cap \operatorname{im} \varphi) + \dim(\ker \varphi)$$
gilt.

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und seien U, W Unterräume von V. Sei $i : U \hookrightarrow U + W$ die Inklusionsabbildung und sei $\pi : U + W \to (U + W)/W$ die Projektionsabbildung.
Zeigen Sie, dass $U \cap W$ der Kern der Abbildung $\varphi := \pi \circ i : U \to (U + W)/W$ ist und dass die induzierte Abbildung $\bar{\varphi} : U/(U \cap W) \to (U + W)/W$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 11.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $n, m, r, s \in \mathbb{N}^+$. Seien die Matrizen $A \in K^{n \times r}$, $B \in K^{r \times m}$ und $C \in K^{s \times n}$, $D \in K^{n \times r}$ gegeben. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Es gilt $\operatorname{rang} A \le \min(n, r)$.
(ii) Nehme an, B sei surjektiv. Dann ist $\operatorname{rang}(A \cdot B) = \operatorname{rang} A$.
(iii) Nehme an, dass $\ker C = \{0\}$ ist. Dann folgt $\operatorname{rang}(C \cdot A) = \operatorname{rang} A$.
(iv) Es gilt $\operatorname{rang}(A \cdot B) \le \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.
(v) Sei $k := \operatorname{rang} A$ und $l := \operatorname{rang} D$. Dann gilt $|k - l| \le \operatorname{rang}(A + D) \le k + l$.

Abgabe: Bis Dienstag, 18.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.