Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011
Matthias Makowski

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

## Blatt 12

**Aufgabe 12.1.** (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen in $\mathbb{R}$.

a) Sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ durch $x = (x^i) \mapsto (0, x^0, x^1, x^2, \ldots)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.
b) Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung $f : V \to V$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

**Aufgabe 12.2.** (4 Punkte)

a) Sei $f$ die Abbildung aus Aufgabe 7.1. Seien $B_1 := \{(1,1,1,1), (2,-4,11,2), (3,1,4,0), (0,-2,1,5)\}$ und $B_2 := \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$ zwei Basen des $\mathbb{R}^4$. Geben Sie die Darstellung der Abbildung $f$ bezüglich der Basen $B_1$ und $B_2$ an.
b) Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei $\mathbb{R}_n[X]$ der Vektorraum der Polynome mit $\deg p \le n$. Weiterhin verwenden wir die Bezeichnungen von Aufgabe 11.1 für die Abbildung $f_n$ und die Standardbasis $B_n$ von $\mathbb{R}_n[X]$. Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$ sei $C_n^a := \{h_0, \ldots h_n\}$ mit $h_0[X] := 1$, $h_i[X] := (X-a)^i$ für $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, eine weitere Basis des $\mathbb{R}_n[X]$.
   (i) Bestimmen Sie die Matrix des Basiswechsels von $B_n$ nach $C_n$.
   (ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die zur linearen Abbildung $f_3$ gehörige Matrix $A$ bezüglich der Basen $C_3^a$ und $C_2^b$.

*Hinweis:* Sie dürfen die verallgemeinerte binomische Formel für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ verwenden:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

**Aufgabe 12.3.** (4 Punkte)
Seien $V, W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $V_1, V_2$ Unterräume von $V$ sowie $W_1, W_2$ Unterräume von $W$ mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(V_1) \subset W_1$ und $\varphi(V_2) \subset W_2$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $B_1$ von $V$ und eine Basis $B_2$ von $W$ gibt, so dass die darstellende Matrix $A$ der Abbildung $\varphi$ bezüglich $B_1$ und $B_2$ die Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

hat mit $A_1 \in K^{\dim W_1 \times \dim V_1}$, $A_2 \in K^{\dim W_2 \times \dim V_2}$.

**Aufgabe 12.4.** (4 Punkte)
Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $B$ von $V$ gibt, so dass die darstellende Matrix $A$ von $\varphi$ bezüglich $B$ die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei $r \in \mathbb{N}$ und $I_r$ die $r$-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

**Abgabe:** Bis Dienstag, 25.01.2010, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.