Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 13

Aufgabe 13.1. (4 Punkte)
Seien V, W Vektorräume über K.

a) Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen mit der punktweise erklärten Addition und Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bilden. Man bezeichnet diesen Vektorraum mit $\operatorname{Hom}(V, W)$.
b) Sei ab jetzt V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Aut}(V)$ die Menge der invertierbaren Endomorphismen auf V. Zeigen Sie nun, dass $\operatorname{Aut}(V)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen ist.
c) Sei $\Phi : \operatorname{Hom}(V, V) \to K^{n\times n}$ der Vektorraum-Isomorphismus aus Theorem 4.5.2. Zeigen Sie, dass die Abbildung Φ auf $\operatorname{Aut}(V)$ ein Gruppen-Isomorphismus, $\Phi : \operatorname{Aut}(V) \to \operatorname{GL}(n, K)$, ist. Hierbei wird $\operatorname{Aut}(V)$ als Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen aufgefasst, $\operatorname{GL}(n, K)$ als multiplikative Gruppe.

Bemerkung: Ein Gruppen-Isomorphismus ist ein Gruppen-Homomorphismus, der eine Inverse besitzt, welche ebenfalls ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Aufgabe 13.2. (4 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die durch folgendes rekursives Gesetz gegeben ist: Sei $a_0 := 0$, $a_1 := 1$ und $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ für $n > 0$ erfüllt.
(ii) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Eigenwerte der Matrix A sind.
(iii) Bestimmen Sie Basen $\{v_1\}$ und $\{v_2\}$ der Eigenräume E_{λ_1} und E_{λ_2}.
(iv) Sei $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix des Basiswechsels von $\{e_1, e_2\}$ nach $\{v_1, v_2\}$. Zeigen Sie, dass $D = TAT^{-1}$ eine Matrix in Diagonalgestalt ist. Berechnen Sie A^n für beliebige $n > 0$ und geben Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$ eine explizite Darstellung von a_n an.

Aufgabe 13.3. (4 Punkte)
Studieren Sie den Beweis von Theorem 5.1.2 und führen Sie dann die dort beschriebene Polynomdivision im Polynomring R in den folgenden Fällen explizit durch:

(i) $p(X) := 3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7$, $q(X) := X^2 - 2X + 1$, $R = \mathbb{R}[X]$.
(ii) $p(X) := X^5 + 3X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 2X - 1$, $q(X) := X^2 - 2$, $R = \mathbb{F}_5[X]$.

Aufgabe 13.4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $g \in K[X]$ ein Polynom mit $d := \deg g > 0$. Zeigen Sie, dass es zu $f \in K[X]$ ein $n \in \mathbb{N}$ und eindeutig bestimmte Polynome $a_i \in K[X]$, $0 \le i \le n$, mit $\deg a_i < d$ und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i$ gibt. Hierbei ist $g^0(X) := 1$ und $g^i(X) := g(X) \cdot g^{i-1}(X)$ für $i \in \mathbb{N}$, $i > 0$.

Bemerkung: In Aufgabe 13.3 (i) wurde in der neuen Version dieses Übungsblattes $R = \mathbb{Z}[X]$ durch $R = \mathbb{R}[X]$ ersetzt, um das Verfahren mit den Mitteln der Vorlesung rechtfertigen zu können (es bleibt allerdings mit dem selben Verfahren auch für $R = \mathbb{Z}[X]$ richtig).
Aufgabe 13.2 ist korrekt gestellt worden.

Abgabe: Bis Dienstag, 01.02.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.