Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Blatt 15

Probeklausur: Auf diese Aufgaben werden keine Punkte mehr vergeben. Die Bearbeitungszeit sollte etwa bei eineinhalb Stunden liegen.

Aufgabe 15.1. Sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y - 4z \\ y + 2z \\ x - 2z + y \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.
b) Geben Sie Basen von $\ker \varphi$ und $\operatorname{im} \varphi$ an.
c) Sei $U := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - 2z + y = 0\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von U, ergänzen Sie diese zu einer Basis B des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ bezüglich der Basis B an.

Aufgabe 15.2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $M := \{A \in K^{n \times n}\}$ der K-Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über K.

a) Auf M definieren wir eine Relation $\sim$ durch $A \sim B :\Leftrightarrow \exists$ eine reguläre Matrix $D \in M$ mit $A = DBD^{-1}$. Zeigen Sie, das $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
b) Sei nun $Q := M/\sim$ der Quotientenraum bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir definieren die Abbildung
$$\operatorname{Det} : Q \to K, \quad [A] \mapsto \det A.$$
Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist.
c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Relationen für $K = \mathbb{F}_3$ und $n = 2$ gültig sind:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15.3. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und sei K ein Körper. Geben Sie die Definition der Begriffe Zeilenrang, Spaltenrang und Rang einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ an. Beweisen Sie dann, dass für $A \in K^{n \times n}$ der Zeilenrang und der Spaltenrang übereinstimmen.

Aufgabe 15.4. Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \ldots, v_k$ zugehörige Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig ist.

Bemerkung: In der ersten Version dieser Probeklausur ist in Aufgabe 15.2 versehentlich das Wort „Quotientenvektorraum“ gefallen. Dies wurde durch „Quotientenraum “ ersetzt, da die Menge der Äquivalenzklassen mit der induzierten Addition und Skalarmultiplikation keinen Vektorraum bildet. In Aufgabe 15.4 wurde der Ausdruck „paarweise verschiedene“ noch hinzugefügt.