Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.

a) Wieviele Elemente besitzt der Vektorraum K^n?
b) Seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ linear unabhängig. Wieviele Elemente besitzt $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$?
c) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von $GL(n, K)$.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)

a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Normfunktion. Beweisen Sie, dass

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \tag{1}$$

für alle $u, v \in V$ gilt.
b) Sei V ein reeller Vektorraum mit einer stetigen Normfunktion, die die Gleichung (1) erfüllt. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$$

ein euklidisches Skalarprodukt auf V definiert wird.
***c)** Wie lauten die entsprechenden Resultate für $\mathbb{C}$-Vektorräume?

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)

a) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist durch

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\rangle = x^1y^1 + \alpha x^1y^2 + \alpha x^2y^1 + 7x^2y^2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?
b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht negative reelle Zahlen. Beweisen Sie

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a^i b^i \le \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (a^i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (b^i)^2\right)^{1/2}.$$

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und V^* der zugehörige Dualruam. Es ist auch möglich den Dualraum zu V^* zu bilden. Der so erhaltene Vektorraum heißt *Bidualraum*

$$V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}(V^*, K)$$

und es existiert eine *kanonische* Abbildung

$$\iota : V \to V^{**}, \quad v \mapsto \iota_v, \quad \text{mit } \iota_v(\varphi) := \varphi(v).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls V endlich-dimensional ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 19.4.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.