Oliver Schnürer, Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass zwei Teilmengen $T, S \subset V$ genau dann orthogonal sind, wenn $\langle S \rangle$ und $\langle T \rangle$ orthogonal sind.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Sei V der Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen reellwertigen Funktionen mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \text{für } f, g \in V.$$

Beweisen Sie, dass $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots\}$ eine orthogonale Familie in V ist.

Aufgabe 2.3. (4 Punkte) Sei V der Raum der Polynome vom Grad kleiner gleich 3 mit dem durch

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{für } p, q \in V$$

definierten Skalarprodukt. Orthonormalisieren Sie die Basis $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ (wobei $x^2 = x \cdot x$ und $x^3 = x \cdot x \cdot x$ ist) mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum der Dimension n. Sei $({}^kA)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge orthogonaler Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $({}^kA) = ({}^ka^i_j)_{1\le i,j\le n}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $({}^{k_l}A)$ und eine orthogonale Matrix $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$${}^{k_l}a^i_j \to a^i_j \quad \text{für } k_l \to \infty \text{ und alle } 1 \le i, j \le n$$

gibt. „Die orthogonale Matrizen $({}^kA)$ besitzen eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A." (Eine analoge Aussage gilt auch für unitäre Matrizen.)

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 3.5.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.