Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 3

Bemerkung: In der neuen Version dieses Übungsblattes wurde in der Aufgabe 3.2 vorausgesetzt, dass die euklidischen Vektorräume V und W endlich-dimensional sind. Sonst wäre die Wohldefiniertheit der adjungierten Abbildung nicht sichergestellt.

Aufgabe 3.1. (2 Punkte)
Sei A eine symmetrische reelle positiv definite $(n \times n)$-Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen sie, dass die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^T & 0 \end{array}\right)$$

regulär ist.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)
Seien V, W endlich-dimensionale euklidische Vektorräume, $f : V \to W$ linear und $U \subset W$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass

$$f^*(U^\perp) = (f^{-1}(U))^\perp$$

gilt, wobei f^* die adjungierte Abbildung bezeichnet.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Eine Spiegelung von V ist eine orthogonale Abbildung $\sigma : V \to V$, so dass $\sigma \neq \mathrm{Id}$ und $\sigma(u) = u$ für jeden Vektor u eines Unterraumes U von V mit $\dim U = \dim V - 1$ gilt. Zeigen Sie:

a) Für jedes $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ ist die Abbildung $V \to V$, $v \mapsto v - 2\langle v, e\rangle \cdot e$ eine Spiegelung von V.
b) Zu jeder Spiegelung σ von V gibt es ein $e \in V$, so dass $\|e\| = 1$ und $\sigma(v) = v - 2\langle v, e\rangle \cdot e$ für jedes $v \in V$.
c) Sei $\alpha : V \to V$ eine orthogonale Abbildung. Dann ist α ein Produkt von Spiegelungen von V.

Aufgabe 3.4. (6 Punkte)
Sei $H(n)$ der reelle Vektorraum der hermiteschen komplexen $(n \times n)$-Matrizen, deren Spur verschwindet. Beweisen Sie:

a) $\dim_{\mathbb{R}} H(n) = n^2 - 1$.
b) Sind $A, B \in H(n)$, so auch $[A, B] = i(AB - BA)$; dies nennt man das *Lieprodukt* von A und B.
c) Für $A, B, C \in H(n)$ gilt
  i) $[A, B] = -[B, A]$,
  ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität).
d) $H(n)$ ist ein euklidischer Raum mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(A \cdot B)$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 10.5.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.