Oliver Schnürer, Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (2 Punkte) Seien F ein Körper, V ein F-Vektorraum, U ein Unterraum von V und

$$U^0 := \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \;\forall u \in U\} \subset V^*$$

der *Annullator* von U. Zeigen Sie:

$$(V/U)^* \cong U^0.$$

Aufgabe 5.2. (4 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = (a^i_j)_{i,j=1,\ldots,n}$ mit:

a) $a^i_j = \delta^i_j + v^i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} v^k \delta_{kj}$ für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$;

b) $a^i_j = 1$, falls $i \neq j$, und $a^i_i = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)
Unter dem *Zentrum* einer Gruppe G versteht man die Menge aller Gruppenelemente z, die mit jedem anderen Gruppenelement vertauschbar sind, die also die Gleichung $gz = zg$ für alle $g \in G$ erfüllen. Zeigen Sie: Das Zentrum der linearen Gruppe $GL(n, F)$ besteht genau aus allen invertierbaren Matrizen der Form $c \cdot \mathbb{1}$ mit $c \in F \setminus \{0\}$.

Aufgabe 5.4. (6 Punkte) (Fortsetzung der Aufgabe 3.4)
Sei $H(n)$ der reelle Vektorraum der hermiteschen $(n \times n)$-Matrizen, deren Spur verschwindet und seien $O(n)$ der Raum der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen und $U(n)$ der Raum der unitären $(n \times n)$-Matrizen. Beweisen Sie:

a) Ist $T \in U(n)$, so wird durch $\operatorname{ad}(T) : H(n) \to H(n), A \mapsto TAT^{-1}$ eine orthogonale Abbildung $H(n) \to H(n)$ definiert.

b) $T \mapsto \operatorname{ad}(T)$ ist ein Homomorphismus von $U(n)$ in die Gruppe der orthogonalen Endomorphismen von $H(n)$; diese Gruppe ist isomorph zu $O(\dim H(n))$.

c) **i)** Die Matrizen

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\; \text{und } E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $H(2)$. Sie heißen *Pauli-Spin-Matrizen.*

ii) Seien $1 \leq j \leq 3$ und $1 \leq k \leq 3$. Es gilt $[E_j, E_k] = 0$, falls $j = k$ ist, und $[E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}] = -2 \cdot \operatorname{sign} \sigma \cdot E_{\sigma(3)}$ für eine Permutation σ.

d) Es gibt einen Isomorphismus von Vektorräumen $\kappa : H(2) \to \mathbb{R}^3$, s.d. $\kappa(E_\nu) = 2e_\nu$, für $1 \leq \nu \leq 3$, und $\kappa([A, B]) = \kappa(A) \times \kappa(B)$, für alle $A, B \in H(2)$, gilt. Hier wird durch $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 24.5.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.