Oliver Schnürer, Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. $SO(n)$ bezeichne die Gruppe aller orthogonalen Automorphismen α von V mit $\det \alpha = 1$ gilt. Zeigen Sie:

a) Ist ψ ein orthogonaler Automorphismus mit $\det \psi = -1$ und σ eine Spiegelung, so gibt es $\varphi_1, \varphi_2 \in SO(n)$, so dass $\psi = \varphi_1 \circ \sigma = \sigma \circ \varphi_2$ gilt.
b) Sei für diese Teilaufgabe $n = 2$. Ist φ eine Drehung, d.h. ein Element von $SO(2)$, und ψ eine orthogonale Abbildung von V mit $\det \psi = -1$, so gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass die Drehungen von V eine abelsche Gruppe bilden.
c) Einen orthogonalen Automorphismus des $\mathbb{R}^3$ nennen wir eine Drehung, falls er bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ mit } 0 \le \alpha < 2\pi,$$

dargestellt ist. Zeigen Sie, dass es zwei Drehungen φ_1, φ_2 von $\mathbb{R}^3$ mit $\varphi_1 \circ \varphi_2 \neq \varphi_2 \circ \varphi_1$ gibt.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Seien $n \ge 2$ und $A = \left(a^i_j\right)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $a^i_j = \beta$, falls $i \neq j$, und $a^i_i = \alpha$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie auf möglichst einfache Weise alle Eigenwerte von A und die Dimension der zugehörigen Eigenräume.
b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper, in dem das charakteristische Polynom eines Endomorphismusses in Linearfaktoren zerfällt. Benutzen Sie dies in einem alternativen Beweis des Satzes von Caley-Hamilton.
Hinweis: In K ist der Endomorphismus trigonalisierbar.

Aufgabe 6.4. (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen Sie:

a) $\mathfrak{p} \subset R$ ist genau dann prim, wenn $R/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist, d.h. falls aus $a \cdot b = 0$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.
b) $\mathfrak{m} \subset R$ ist genau dann maximal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.
c) Jedes maximale Ideal ist prim.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 31.5.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.