Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)

a) Sei
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, s.d. $D = P^T M P$ eine Diagonalmatrix ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionen $\mu = 3 - \lambda$ und $\nu = \mu^2$.

b) Sei
$$M = \begin{pmatrix} 31 & 4-i & -11+7i \\ 4+i & 15 & -3+i \\ -11-7i & -3-i & 24 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$
gegeben. Bestimmen sie eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D, s.d. $D = U^* M U$ gilt.
Hinweis: Hilft Ihnen vielleicht die Antwort auf die Frage „nach dem Leben, dem Universum und dem ganzen Rest“ bei der Eigenwertsuche?

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Begründen Sie anhand des Beweises von Lemma 6.10.11 und Theorem 6.10.12, warum eine positiv semidefinite Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren, so dass $A = S \cdot P$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie die Polarzerlegung $A = S \cdot P$ der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
d.h. Sie sollen eine positiv semi-definite Matrix S und eine orthogonale Matrix P finden, so dass $A = S \cdot P$ gilt.

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)
Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt dicht in X, falls
$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists y \in Y : ||x - y|| < \varepsilon.$$
Wenn wir $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$ identifizieren, dann definiert die Standard-Norm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. auf $\mathbb{C}^{n^2}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$. Beweisen Sie:

a) Y ist genau dann dicht in $X = \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $X = \mathbb{C}^{n\times n}$, falls es für jede Matrix $A = \left(a^i_j\right)_{1\le i,j\le n}$ in X eine Folge $\left(\left({}^k a^i_j\right)_{1\le i,j\le n}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in Y mit
$${}^k a^i_j \to a^i_j$$
für $k \to \infty$ und alle $1 \le i, j \le n$ gibt.

b) $GL(n, \mathbb{R})$ ist dicht in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

c) Die Menge der diagonalisierbaren komplexen $(n \times n)$-Matrizen ist dicht in $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Hinweis: Betrachten Sie $A + \varepsilon B$ mit einer geeigneten Matrix B und zeigen Sie, dass dies für kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ eine invertierbare beziehungsweise diagonalisierbare Matrix ist.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $G(t) = (g^i_j(t))$ eine symmetrische, invertierbare Matrix ist. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\tilde{G}(t) = (\tilde{g}^i_j(t))$ die Inverse von $G(t)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{G}$ symmetrisch ist.
Wir bezeichnen mit $g_i(t)$, $1 \le i \le n$, die Spalten von $G(t)$. Zeigen Sie nun, dass die Abbildungen $t \mapsto \det G(t)$ und $t \mapsto \tilde{G}(t)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und die folgenden Relationen erfüllen:

$$\frac{d}{dt}\det(G(t)) = \sum_{i=1}^n \det(g_1(t), \ldots, g_{i-1}(t), \frac{d}{dt} g_i(t), g_{i+1}(t), \ldots, g_n(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\det(G(t)) = \det(G(t)) \sum_{i,j=1}^n \tilde{g}^i_j(t) \frac{d}{dt} g^j_i(t),$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{g}^i_j(t) = -\sum_{k,l=1}^n \tilde{g}^i_k(t) \left(\frac{d}{dt} g^k_l(t)\right) \tilde{g}^l_j(t).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Multilinearität der Determinante, die Darstellung der Inversen aus Theorem 5.3.14 und $\delta^i_j = \sum_{k=1}^n g^i_k \tilde{g}^k_j$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 07.06.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.