Oliver Schnürer, Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (6 Punkte)

(i) Skizzieren Sie anhand des Studiums der Beweise von Theorem 7.2.2 und Theorem 7.2.3 einen Algorithmus (ein Verfahren), welches zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Transformationsmatrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ liefert, so dass die Matrix $B^{-1}AB$ in Jordanscher Normalform ist.

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 16 & 12 & -4 & -4 \\ -2 & -18 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.2. (8 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V = \mathbb{C}^{n\times n}$.

(i) Für $z \in \mathbb{C}^n$ bezeichne $|z|$ den Betrag von z, d.h. $|z| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |z^i|^2}$. Wir definieren nun die Abbildung

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \sup_{z\in\mathbb{C}^n, |z|=1} |Az|.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Norm auf V definiert, die sogenannte Operatornorm.

(ii) Sei nun $A \in V$ beliebig. Wir definieren für $i \in \mathbb{N}$ die Matrix $F_i := \sum_{k=0}^i \frac{A^k}{k!}$. Zeigen Sie, dass $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im normierten Raum $(V, ||\cdot||)$ ist.
Zusatz: Zeigen Sie, dass $(V, ||\cdot||)$ vollständig ist (*zusätzlich* 2 Punkte).
Bemerkung: Wir verwenden nun die Vollständigkeit von $(V, ||\cdot||)$ und definieren für $A \in V$ die Matrix

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^i \frac{A^k}{k!}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $A, B, S \in V$, S invertierbar, mit $A = SBS^{-1}$ die Gleichung

$$\exp(A) = S\exp(B)S^{-1}$$

gilt.

(iv) Seien $A, B \in V$ mit $[A, B] = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

gilt.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die verallgemeinerte binomische Formel für kommutierende Matrizen.

(v) Sei $J = (J^i_j) \in V$ eine Matrix in Jordangestalt. Sei D die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen von J, d.h. $D = (d^i_j) = (\delta^i_j J^i_j)$, und sei $N := J - D$. Zeigen Sie, dass D und N kommutieren.

(vi) Zeigen Sie, dass für $A \in V$ die Gleichung

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

gilt.

(vii) Berechnen Sie $\exp(A)$ und $\det(\exp(A))$ für die Matrix aus Aufgabe 8.1.

Aufgabe 8.3. (2 Punkte)
Sei

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie N^{10} mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 14.06.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.