Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$. Sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus und $\mathbb{C}^n$ besitze eine Basis aus Eigenvektoren von f^k. Besitzt $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von f?
Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform.

Aufgabe 9.2. (6 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Sei $G = (g^i_j) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und bezeichne die Inverse von G mit $G^{-1} = (\tilde{g}^i_j)$. Sei weiterhin $A = (a^i_j) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir sagen $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich G zum Eigenwert λ, falls für alle $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$,

$$\sum_{j=1}^n a^i_j \xi^j = \lambda \sum_{j=1}^n g^i_j \xi^j$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $A\xi = \lambda G\xi$. (Vergleiche auch $\det(A - \lambda G) = 0$.)
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die geordneten Eigenwerte von A bezüglich G, d.h. es gelte $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i)
$$\lambda_1 = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, Gx\rangle}, \quad \lambda_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, Gx\rangle}.$$

(ii) Für alle $1 \le i \le n$ gilt
$$\lambda_1 \le \frac{a^i_i}{g^i_i} \le \lambda_n.$$

(iii) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semi-definit. Seien μ_i, $1 \le i \le n$, die geordneten Eigenwerte von $A + B$ bezüglich G. Zeigen Sie, dass $\lambda_i \le \mu_i$ gilt.

(iv) Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit geordneten Eigenwerten η_i, $1 \le i \le n$, bezüglich G. Gelte $C \ge A$, d.h. $C - A$ sei positiv semi-definit. Zeigen Sie, dass $\eta_i \ge \lambda_i$ für alle $1 \le i \le n$ gilt.

(v) Sei A positiv semi-definit. Für alle $1 \le i \le n$ gilt
$$\lambda_i \le \operatorname{tr}(G^{-1} \cdot A).$$
Folgern Sie hieraus, dass für alle $1 \le i \le n$
$$\frac{a^i_i}{g^i_i} \le \operatorname{tr}(G^{-1} \cdot A)$$
gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass λ genau dann ein Eigenwert von A bezüglich G ist, wenn λ ein Eigenwert von $\sqrt{G^{-1}}A\sqrt{G^{-1}}$ ist.

Bemerkung: Seien φ, ψ symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor von φ bezüglich ψ zum Eigenwert λ, falls

$$\varphi(\cdot, \xi) = \lambda\psi(\cdot, \xi)$$

gilt. Seien $A = (a_{ij})$ und $G = (g_{ij})$ die φ und ψ bezüglich einer festen Basis darstellenden Matrizen. Damit wird die Eigenwertgleichung zu

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi^j = \lambda \sum_{j=1}^n g_{ij}\xi^j.$$

Vergleiche auch $\det(A - \lambda G) = 0$.

Aufgabe 9.3. (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Seien weiterhin φ eine nicht-ausgeartete, symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ eine Linearform und $c \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die Menge

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,x) + \psi(x) + c = 0\}$$

als eine Quadrik. Wir sagen Q sei in *Normalform*, wenn wir eine Darstellung

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \left(y^i\right)^2 - \sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i \left(y^i\right)^2 = \alpha \right\}$$

mit $1 \leq s \leq n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq n$, und $\alpha \in \{0,1\}$ haben.

(i) Zeigen Sie, dass sich die Quadrik Q mittels einer Ähnlichkeitstransformation auf Normalform bringen lässt, d.h. dass es ein $A \in O(n)$, ein $r \in \mathbb{R}_+$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass mit $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto y := r \cdot Ax + b$ die Menge $\eta(Q)$ eine Quadrik in Normalform ist.
(ii) Bestimmen Sie die verschiedenen zwei- und dreidimensionalen geometrischen Objekte, welche durch eine Quadrik Q wie in der Aufgabenstellung dargestellt werden können.
(iii) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und } c = -3$$

gegeben. Sei φ eine Bilinerform, welche bezüglich der Standardbasis durch die Matrix A dargestellt wird und sei ψ eine Linearform mit $\psi(x) := \langle b, x \rangle$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Sei die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x,x) + \psi(x) + c = 0\}$ gegeben. Bestimmen Sie eine Ähnlichkeitstransformation η, so dass $\eta(Q)$ in Normalform ist.

Aufgabe 9.4. (2 Punkte)
Sei R ein Integritätsring. Seien $a, b \in R$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $a|b$,
(ii) $b \in (a)$,
(iii) $(b) \subset (a)$.

Aufgabe 9.5. (*zusätzlich* 2 Punkte)
Sei R ein Integritätsring. Seien $a, b \in R$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $a|b$ und $b|a$,
(ii) $(a) = (b)$,
(iii) a und b sind assoziiert.

Aufgabe 9.6. (*zusätzlich* 4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir die vom Hilbert-Schmidt Skalarprodukt induzierte Norm:

$$||A|| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}.$$

Seien nun $B = (b_i^j)_{i,j=1,\ldots,n}$, $C = (c_i^j)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrizen, so dass $B \geq 0$ und $C > 0$ ist. Zeigen Sie, dass

$$||B|| \leq \alpha \operatorname{tr}(BC)\, ||C||\, ||C^{-1}||^2$$

mit $\alpha = 1$ gilt. Was ist die kleinste Zahl $\alpha > 0$, so dass diese Ungleichung gilt?
Hinweis: Versuchen Sie $\operatorname{tr}(BC)$ als eine Norm umzuschreiben und zeigen Sie die Submultiplikativität der Norm $|| \cdot ||$.

Abgabe: Bis Dienstag, 28.06.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.