Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (2 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik p, wobei p prim sei. Zeigen Sie, dass für alle Elemente $r, s \in R$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$(r+s)^{p^n} = r^{p^n} + s^{p^n}$$

gilt.

Aufgabe 10.2. (6 Punkte)
Sei F ein Körper. Seien R, R' zwei Ringe. Wir sagen $R \cong R'$, wenn es einen bijektiven Ringhomomorphismus $\Phi : R \to R'$ gibt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $F[X]/(X-1) \cong F$.
(ii) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$.
(iii) Es gibt einen Körper K, der zu $\mathbb{Q}[X]/(X^2-3)$ isomorph ist, und $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe 10.3. (4 Punkte)
Sei R ein Hauptidealring und seien $a, b \in R \setminus \{0\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $d \in R$ ist genau dann ein ggT von a und b, wenn $Rd = Ra + Rb$ gilt.
(ii) $m \in R$ ist genau dann ein kgV von a und b, wenn $Rm = Ra \cap Rb$ gilt.

Aufgabe 10.4. (2 Punkte)
Sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\mathbb{Z}[i]$ ist bezüglich der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit Eins.
(ii) $\delta : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $a + bi \mapsto a^2 + b^2$ ist eine Gradfunktion auf $\mathbb{Z}[i]$, mittels welcher $\mathbb{Z}[i]$ zu einem euklidischen Ring wird.
(iii) Bestimmen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 10.5. (*zusätzlich* 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$ ein Integritätsring ist, der nicht faktoriell ist. Betrachten Sie hierfür die Faktorisierungen $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5}) \cdot (1-\sqrt{-5})$ und zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, (1+\sqrt{-5}), (1-\sqrt{-5})$ jeweils irreduzibel und paarweise nichtassoziiert sind. (Handelt es sich bei diesen Elementen um Primelemente?)

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 05.07.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.