Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2011
Matthias Makowski, Marcello Sani

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (2 Punkte)
Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0,0\}$. Zeigen sie, dass es einen Isomorphismus

$$\Phi^{(r+1,s)} : E^{(r+1,s)} \to L^{r+s}(\underbrace{E^*,\ldots,E^*}_{r \text{ Stück}}, \underbrace{E,\ldots,E}_{s \text{ Stück}}; E)$$

gibt.

Aufgabe 11.2. (4 Punkte)
Sei E ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum über dem Körper F und bezeichne das Skalarprodukt mit $g : E \times E \to F$.

(i) Zeigen Sie zunächst, dass die Abbildung $\Gamma : E \to E^*$, $\xi \mapsto g(\xi,\cdot)$, ein Isomorphismus ist.
(ii) Seien nun $(r,s) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $\Psi : E^{(r,s)} \to E^{(r-1,s+1)}$ gibt, so dass für $T \in E^{(r,s)}$ die Gleichung

$$T(\omega^1,\ldots,\omega^r,\xi_1,\ldots,\xi_s) = \Psi(T)(\omega^1,\ldots,\omega^{r-1},\xi_1,\ldots,\xi_s,\Gamma^{-1}(\omega^r))$$

für alle $(\omega^1,\ldots,\omega^r,\xi_1,\ldots,\xi_s) \in (E^*)^r \times E^s$ gilt.

Aufgabe 11.3. (4 Punkte)
Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0,0\}$. Sei

$$\Phi := \Phi^{(1,1)} : E^{(1,1)} \to \operatorname{End}(E)$$

der Isomorphismus aus der Aufgabe 11.1 für $r=0, s=1$. Wir definieren die Spur $\operatorname{tr} : E^{(r+1,s+1)} \to E^{(r,s)}$, indem wir $T \in E^{(r+1,s+1)}$ die Abbildung

$$(E^*)^r \times E^s \ni (\omega^1,\ldots,\omega^r,\xi_1,\ldots,\xi_s) \mapsto \operatorname{tr}(\Phi(T(\omega^1,\ldots,\omega^r,\cdot,\xi_1,\ldots,\xi_s,\cdot)))$$

zuordnen. Zeigen Sie, dass die Spur eine wohldefinierte lineare Abbildung von $E^{(r+1,s+1)}$ nach $E^{(r,s)}$ ist und geben Sie die Koordinatendarstellung der Spur an.

Aufgabe 11.4. (4 Punkte)
Seien U,V,W und V_i, $i \in I$, F-Vektorräume. Seien die folgenden auf Erzeugendensystemen angegebenen Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned}
V \otimes W &\xrightarrow{\sim} W \otimes V, & v \otimes w &\mapsto w \otimes v,\\
(U \otimes V) \otimes W &\xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W), & (u \otimes v) \otimes w &\mapsto u \otimes (v \otimes w),\\
\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W), & (v_i)_{i\in I} \otimes w &\mapsto (v_i \otimes w)_{i\in I}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildungen Isomorphismen sind.

Aufgabe 11.5. (2+*zusätzlich* 4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Sei E ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für $r \in \mathbb{N}_+$ definieren wir die folgende Menge

$$\mathrm{Alt}^r(E) := \{T \in E^{(0,r)} : \forall\, \sigma \in S_r, \forall\, \xi_1, \ldots \xi_r \in E : T(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot T(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(r)})\},$$

wobei wir mit $\mathrm{sign}(\sigma)$ das Signum der Permutation σ bezeichnen (siehe Definition 5.2.3). Seien $r, s \in \mathbb{N}_+$ und $T_1 \in E^{(0,r)}, T_2 \in E^{(0,s)}$, so definieren wir für $\xi_1, \ldots, \xi_{r+s} \in E$ das folgende Produkt

$$(T_1 \wedge T_2)(\xi_1, \ldots, \xi_{r+s}) := \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \mathrm{sign}(\sigma)(T_1 \otimes T_2)(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(r+s)}).$$

Ist weiterhin $t \in \mathbb{N}_+$ und $T_3 \in E^{(0,t)}$, so definieren wir

$$T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 := (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3.$$

Somit ist das Produkt $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$ von k Elementen $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \mathrm{Alt}^1(E)$ induktiv durch die Abbildung

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) \mapsto ((\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{k-1}) \wedge \omega^k)((\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}), \xi_k)$$

gegeben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen (die mit einem Stern versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben):

(i) $\mathrm{Alt}^r(E)$ ist ein Unterraum von $E^{(0,r)}$.

(ii) Es ist $\mathrm{Alt}^r(E) = \{0\}$ für $r > n$.

(iii*) Für $(r, s) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ ist die Abbildung

$$\wedge : \mathrm{Alt}^r(E) \times \mathrm{Alt}^s(E) \to \mathrm{Alt}^{r+s}(E), (T_1, T_2) \mapsto T_1 \wedge T_2$$

wohldefiniert und bilinear.

(iv*) Das oben definierte Produkt ist assoziativ. Beweisen Sie diese Aussage nur für Elemente aus $\mathrm{Alt}^1(E) = E^{(0,1)}$, d.h. seien $\omega^1, \omega^2, \omega^3 \in \mathrm{Alt}^1(E)$, dann ist zu zeigen, dass

$$\omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \omega^3) = (\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^3$$

gilt.

(v*) Sei $r \in \mathbb{N}_+$, $1 \leq r \leq n$. Für $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \mathrm{Alt}^1(E)$ und $\xi_1, \ldots, \xi_r \in E$ gilt

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^r(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \det(\omega^i(\xi_j)).$$

(vi*) Sei $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n$. Es gilt $\dim \mathrm{Alt}^r(E) = \binom{n}{r}$.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 12.07.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.