Oliver Schnürer, Universität Konstanz Wintersemester 2012/2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Sei $u \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, t_0))$ eine Lösung der Gleichung

$$\dot{u} + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

auf einem maximalen Existenzintervall $[0, t_0)$ mit $t_0 \in (0, \infty]$. Nehme an, $u(\cdot, 0)$ sei nicht monoton wachsend. Zeige, dass $u \notin C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ gilt, d. h. es muss $t_0 < \infty$ gelten..
Hinweis: Betrachte die Lösung $\varphi \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, t_0))$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(x, t) = u(\varphi(x, t), t), & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0) \\ \varphi(x, 0) = x, & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aufgabe 2.2. (2 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen der RWP

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Zeige, dass

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| \le \max_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|$$

gilt.

Aufgabe 2.3. (6 Punkte)
Sei $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ und definiere $u := \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Sei $n \ge 3$. Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

(ii) Sei $n = 2$. Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |u| \to 0 \quad \text{für } r \to \infty$$

genau dann wenn $\int_{\mathbb{R}^2} f = 0$ gilt. Falls $\int_{\mathbb{R}^2} f > 0$ ist und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Folge mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ ist, so folgt $|u(x_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Zeige, dass für gegebenes $R_0 > 0$ für alle $y \in B_{R_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $|x_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ auch

$$|\log |x_n - y| - \log |x_n|| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

gilt.

(iii) Es gibt eine nur von n abhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$\|Du\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$$

gilt.

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE`
Abgabe: Bis Montag, 05.11.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.