

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (8 Punkte)

Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei $u := \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung sei. Zeige die folgenden Aussagen:

- (i) Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$v_i(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Dann ist u stetig partiell differenzierbar und $u_i = v_i$.

Anleitung: Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ für $t \leq 1$ und $\eta(t) = 1$ für $t \geq 2$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_{\varepsilon}(t) := \eta(\frac{t}{\varepsilon})$ und die Funktion

$$w_{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{\Omega} \Phi(x-y) \eta_{\varepsilon}(|x-y|) f(y) dy.$$

Zeige, dass für kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x \in K} |w_{\varepsilon}(x) - u(x)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

und

$$\sup_{x \in K} |D_i w_{\varepsilon}(x) - v_i(x)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gelten.

- (ii) Sei $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$ in Ω .

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)

Beweise den Satz von Liouville mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen.

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(\Omega)$. Nehme an, dass für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0$$

gilt. Zeige, dass u in Ω harmonisch ist.

Anleitung: Zeige, dass

- (i) die Mollifizierungen u_{ε} auch diese Integralbedingung erfüllen,
- (ii) die Mollifizierungen u_{ε} harmonisch sind und
- (iii) u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE>

Abgabe: Bis Montag, 12.11.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.