

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (2 Punkte)

Seien $k, n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

gilt, wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex ist und

$$\begin{aligned} \binom{|\alpha|}{\alpha} &:= \frac{|\alpha|!}{\alpha!}, \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch in Ω . Zeige, dass u reell analytisch in Ω ist.

Anleitung: Sei $x_0 \in \Omega$ und wähle $r := \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

- (i) Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine von α unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|D^\alpha u\|_{C^0(B_r(x_0))} \leq c \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^k \alpha!$$

gibt. Verwende hierfür die Stirlingsche Formel

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k! e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

- (ii) Sei $r_0 := \frac{r}{2^{n+2} n^3 e}$. Zeige, dass die Taylorreihe von u um x_0 in $B_{r_0}(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine reell analytische Funktion. Sei $\Omega' \subset \Omega$ eine nichtleere, offene Menge. Zeige, dass aus $f|_{\Omega'} = 0$ auch $f \equiv 0$ folgt.

Aufgabe 4.4. (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

- (i) Sei u nach unten beschränkt. Zeige, dass u konstant ist.
(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Nehme an es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^k)$$

gilt. Zeige, dass u ein Polynom mit $\text{grad } u \leq k$ ist.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE>

Abgabe: Bis Montag, 19.11.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.