

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

Sei $K(x, y)$ wie im Theorem über die Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum und $n \geq 2$. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$1 = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy$$

gilt. Es genügt den Beweis für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ durchzuführen.

Hinweis: Zeige die Behauptung per Induktion nach m und verwende $n\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}$.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion u , die wir im Theorem „Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum“ definiert haben, in $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ist.

Aufgabe 5.3. (8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$. Sei $g \in C^0(\overline{B_r(0)})$. Sei $u \in C^2(\overline{B_r(0)})$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_r(0), \\ u = g & \text{auf } \partial B_r(0). \end{cases}$$

- (i) Sei $0 \neq x \in B_r(0)$. Zeige, dass $\varphi^x(y) := \Phi(\frac{|x|}{r}|y - \tilde{x}|)$ mit der Involution $\tilde{x} = \frac{r^2 x}{|x|^2}$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0 & \text{in } B_r(0) \\ \varphi^x(y) = \Phi(y - x) & \text{für } y \in \partial B_r(0) \end{cases}$$

löst. Für $x = 0$ setzen wir $\varphi^x \equiv \Phi(r)$.

- (ii) Sei für $x, y \in B_r(0)$ mit $x \neq y$ die Funktion $G(x, y) := \Phi(y - x) - \varphi^x(y)$ definiert. Verwende Theorem 3.19, um die Darstellung des Integralkerns K in

$$u(x) = \int_{\partial B_r(0)} K(x, y) g(y) dy$$

herzuleiten.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE>

Abgabe: Bis Montag, 26.11.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.