ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG THEORIE PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $Lu \geq f$. Hierbei betrachten wir

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_i(x) + d(x)u(x),$$

wobei

- (i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ gilt.
- (ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

- (iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x)|, |b^i(x)|, |d(x)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$.

Sei $d \leq 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, K, \lambda)$ gibt, so dass

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + c \sup_{\Omega} |f|$$

gilt.

Aufgabe 7.2. (12 Punkte)

Sei $T > 0$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Erfülle

$$u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C^0((\Omega \times (0, T)) \cup \mathcal{P}(\Omega \times (0, T)))$$

die Differentialungleichung

$$\dot{u} \leq Lu \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

wobei wir annehmen, dass

$$Lu(x, t) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t)u_{ij}(x, t) + \sum_{i=1}^n b^i(x, t)u_i(x, t) + d(x, t)u(x, t),$$

wobei

- (i) a^{ij} symmetrisch ist, d. h. $a^{ij}(x, t) = a^{ji}(x, t)$ gilt.
- (ii) L elliptisch ist: Es existiert $\lambda > 0$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j$$

für alle $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

- (iii) die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt $K > 0$, so dass

$$|a^{ij}(x, t)|, |b^i(x, t)|, |d(x, t)| \leq K$$

für alle i, j und alle $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$.

a) Sei $d \leq 0$. Zeige, dass

$$\sup_{\Omega \times (0, T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0, T))} u^+$$

gilt.

b) Zeige, dass

$$\sup_{\Omega \times (0, T)} u^+ \leq \sup_{\mathcal{P}(\Omega \times (0, T))} (e^{Kt} u^+)$$

gilt.

c) Sei $t_0 \in (0, T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte

(i) es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$

(ii) $0 = u(x_0, t_0) > u(x, t)$ für $(x, t) \in (\overline{B_R(y)} \times \overline{I}) \setminus \{(x_0, t_0)\}$.

Zeige, dass

$$\langle Du(x_0, t_0), x_0 - y \rangle > 0,$$

ist, falls diese Ableitung existiert.

d) Sei $t_0 \in (0, T)$ und $I = (t_0 - \delta, t_0)$ mit $0 < \delta < t_0$. Nehme an, dass $u < 0$ in $I \times \overline{\Omega}$ gilt und dass es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0, t_0) = 0$ gibt. Zeige, dass $u(x, t_0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Webseite: <http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE>

Abgabe: Bis Montag, 10.12.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.