Oliver Schnürer, Matthias Makowski | Universität Konstanz | Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Vorlesung Theorie partieller Differentialgleichungen

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (8 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Perronlösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige, dass es eine Konstante $c = c(\Omega, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})})$ mit

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ x_0 \in \partial\Omega}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|} \leq c$$

gibt.
Anleitung:

(i) Sei $R \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$

$$\left|x - \left(0, \tfrac{R}{2}\right)\right|^2 - \left(\tfrac{R}{2}\right)^2 \geq \tfrac{1}{2}\left|x - (0, R)\right|^2$$

gilt.

(ii) Zeige, dass es eine Konstante $M = M(R, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})})$ gibt, so dass für alle $x_0 \in \partial\Omega$ und alle $x \in \overline{\Omega}$

$$\varphi(x) \leq (\geq)\, \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle + (-) M|x - x_0|^2$$

gilt.

(iii) Sei $R \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante, so dass Ω die äußere Kugelbedingung mit Radius R erfüllt. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Sei $z_1 \in \Omega^c$ mit $\overline{B_R(z_1)} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Sei $z_0 := x_0 + \frac{1}{2}(z_1 - x_0)$. Zeige, dass es eine Konstante $c_0 = c_0(M, \Omega, R)$ gibt, so dass die Funktion

$$\psi^{\pm}_{x_0} : \mathbb{R}^n \setminus B_{\frac{R}{2}}(z_0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0 \rangle \pm c_0 \left(\left(\tfrac{R}{2}\right)^{2-n} - |x - z_0|^{2-n} \right)$$

die Ungleichung $\psi_{x_0}(x) \geq (\leq)\, \varphi(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$ erfüllt. Wir nennen $\psi^{\pm}_{x_0}$ eine obere beziehungsweise untere Barriere in x_0 zu den Randwerten φ.

(iv) Zeige, dass es eine Konstante $c_1 = c_1(\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}, \Omega, R)$ gibt, so dass für alle $x_0 \in \partial\Omega$

$$[\psi^{\pm}_{x_0}]_{C^{0,1}(\Omega)} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|\psi^{\pm}_{x_0}(x) - \psi^{\pm}_{x_0}(y)|}{|x - y|} \leq c_1$$

gilt, wobei $\psi^{\pm}_{x_0}$ die im vorigen Teil konstruierten Barrieren bezeichnet.

(v) Verwende die Barrieren in den Randpunkten, um die gewünschte Abschätzung herzuleiten.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte)
Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ eine Lösung von $\dot{u} - \Delta u = 0$.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$u_\lambda : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(ii) Zeige, dass

$$v : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto \langle x, Du(x, t) \rangle + 2t\dot{u}(x, t)$$

ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch, $u \geq 0$ und $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$. Beweise die folgende explizite Version der Harnackungleichung für $x \in B_R(0)$:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

Beweise damit erneut den Satz von Liouville.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen1213.html#PDE`
Abgabe: Bis Montag, 17.12.2012, 9.55 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.