Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 1

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $1 \le p < \infty$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Für eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definieren wir

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

und

$$\|u\|_{k,p;\Omega} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Zeige, dass dies zwei äquivalente Normen auf dem Raum $W^{k,p}(\Omega)$ sind.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Wir definieren $W := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$ und für $w \in W$ setzen wir

$$\|w\|_W := \sqrt{\int_\Omega |\nabla w|^2}.$$

Sei $f \in L^2(\Omega) \cap W$. Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ definieren wir

$$I(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu.$$

(i) Zeige, dass $(W, \|\cdot\|_W)$ ein Banachraum ist.
(ii) Begründe, warum das Funktional I unter allen $w \in W$ einen Minimierer $w_0 \in W$ besitzt.
(iii) Zeige, dass der Minimierer w_0 das Funktional I auch unter allen $u \in W^{1,2}(\Omega)$ minimiert.
(iv) Gib an, von welchem Randwertproblem der Minimierer eine schwache Lösung darstellt, d. h. bestimme die Euler-Lagrange Gleichung des Funktionals.

Abgabe: Bis Mittwoch, 24.04.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.
Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`