Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 2

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)
Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $\|\psi\|_{C^1(\Omega)}, \|\psi^{-1}\|_{C^1(\Omega)} < \infty$. Sei $1 \le p < \infty$. Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\tilde{\Omega}), u \mapsto \tilde{u} := u \circ \psi^{-1}.$$

Zeige, dass Φ ein topologischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \le i \le n$ sei $a^i \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Wir nehmen an, dass es Konstanten $c_A, \vartheta > 0$ gibt, so dass für alle $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial a^i}{\partial x}(x, z, p)\right| \le c_A(1 + |z| + |p|), \tag{1}$$

$$\left|\frac{\partial a^i}{\partial z}(x, z, p)\right| + \left|\frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x, z, p)\right| \le c_A \tag{2}$$

und

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2 \tag{3}$$

gelten. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ eine schwache Lösung der Gleichung

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(a^i(x, u, Du)\right)_i = f.$$

Zeige, dass dann auch $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt und für alle $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ eine Konstante $c = c(\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|u\|_{W^{1,2}(\Omega'')}, c_A, \vartheta)$ existiert, so dass

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \le c$$

gilt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 08.05.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.
Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`