Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 3

Aufgabe 3.1. (8 Punkte)
Sei $\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x^n > 0\}$. Seien $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^i, d \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei (a^{ij}) gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante $\vartheta > 0$. Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu := -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei $\zeta \in C^\infty_c(B_1(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\})$ eine Abschneidefunktion mit $0 \leq \zeta \leq 1$ und $\zeta \equiv 1$ auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Definiere für $1 \leq k \leq n-1$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ klein

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u).$$

Sei $A := \int_\Omega a^{ij} u_i v_j$ und sei $B := \int_\Omega (f - b^i u_i - du)v$.

(i) Zeige, dass $v \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

(ii) Zeige, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$A \geq \frac{\vartheta}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 - c \int_\Omega |Du|^2$$

gilt.

(iii) Zeige, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$|B| \leq \frac{\vartheta}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 + c \int_\Omega (f^2 + u^2 + |Du|^2)$$

gilt.

(iv) Folgere hieraus, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |D_k^h Du|^2 \leq c \int_\Omega (f^2 + u^2 + |Du|^2)$$

gilt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 15.05.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.