Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 4

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Seien $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ und $a^i \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, gegeben, wobei die a^i die Bedingungen (1), (2) und (3) von Aufgabe 2.2 erfüllen. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -(a^i(x,u,Du))_i = f & \text{in } \Omega, \\ -a^i(x,u(x),Du(x))\nu_i(x) = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann ist $u \in W^{2,2}(\Omega)$ und es gibt eine Konstante $c = c(n, \vartheta, c_A)$, so dass

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le c\left(1 + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\right)$$

gilt.

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktionen $a^{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in C^m(\overline{\Omega})$ gegeben, so dass (a^{ij}) gleichmäßig elliptisch ist. Seien $f \in W^{m,2}(\Omega)$ und $\varphi \in W^{m+2,2}(\Omega)$ gegeben. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu := -(a^{ij}u_j)_i + \sum_{i=1}^n b^i u_i + cu = f & \text{in } \Omega, \\ -a^{ij}u_j\nu_i = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige, dass dann auch $u \in W^{m+2,2}(\Omega)$ gilt und dass es eine Konstante $c = c(n, \Omega, L)$ mit

$$\|u\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} \le c\left(\|\varphi\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{m,2}(\Omega)} + \|u\|_{W^{m-1,2}(\Omega)}\right).$$

gibt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 22.05.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.