Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$. Seien $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^i, d \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei (a^{ij}) gleichmäßig elliptisch mit Elliptizitätskonstante $\vartheta > 0$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} Lu := -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du = f & \text{in } \Omega, \\ -a^{ij}u_j\nu_i = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sei $i \in \{1, 2\}$ fest und $\varphi \in X_i$, wobei $X_1 := H^1(\Omega)$ und $X_2 := L^\infty(\partial\Omega)$ seien.

a) Zeige, dass es eine Konstante $c = c(n, \Omega, L)$ gibt, so dass

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \le c(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{X_i})$$

gilt.

b) Für alle $1 \le j \le n$ sei nun $b^j = 0$ und $d = 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c = c(n, \Omega, L)$ gibt, so dass

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le c\left(\left|\int_\Omega u\right| + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

gilt.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein $c = c(n) > 0$, sodass

$$\|Du\|^2_{L^\infty} \le c\,\|u\|_{L^\infty} \cdot \left\|D^2u\right\|_{L^\infty}.$$

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 29.05.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.