Oliver Schnürer, Matthias Makowski Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 6

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktionen $a^{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in C^m(\overline{\Omega})$ gegeben, so dass (a^{ij}) gleichmäßig elliptisch ist. Seien $f \in W^{m,2}(\Omega)$ und $\varphi \in W^{m+2,2}(\Omega)$ gegeben. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu := -(a^{ij}u_j)_i + b^i u_i + cu = f & \text{in } \Omega, \\ -a^{ij}u_j \nu_i = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeige, dass dann auch $u \in W^{m+2,2}(\Omega)$ gilt und dass es eine Konstante $c = c(n, \Omega, L)$ mit

$$\|u\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} \leq c \left(\|\varphi\|_{W^{m+2,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{m,2}(\Omega)} + \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} \right).$$

gibt.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Sei H ein reeller Hilbertraum und $\{0\} \neq V \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Seien K, B symmetrische, stetige Bilinearformen auf H.

(i) Wir nehmen an, K sei kompakt, d. h. falls $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ schwach in H gegen $u \in H$ konvergiert, dann konvergiert $K(u_n) := K(u_n, u_n)$ gegen $K(u)$, und positiv, d. h. für alle $u \neq 0$ gilt $K(u) > 0$. B sei koerziv relativ zu K, d. h. es gibt Konstanten $c_0, c > 0$, so dass für alle $u \in H$

$$B(u) := B(u, u) \geq c\|u\|^2 - c_0 K(u)$$

gilt. Zeige, dass das es ein $v_0 \in V$ gibt, so dass für alle $0 \neq v \in V$

$$\lambda_0 := \frac{B(v_0)}{K(v_0)} \leq \frac{B(v)}{K(v)}$$

gilt. Zeige weiterhin, dass für alle $v \in V$

$$B(v_0, v) = \lambda_0 K(v_0, v)$$

gilt.

(ii) Verwende Teilaufgabe (i), um Theorem 2.2 aus dem Skript zu beweisen.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 05.06.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.