Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei H ein reeller Hilbertraum und $\{0\} \neq V \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum. Seien K, B symmetrische, stetige Bilinearformen auf H. Sei K positiv und kompakt und sei B koerziv relativ zu K. Induktiv definieren wir nun für $i \in \mathbb{N}_+$ die Paare (λ_i, u_i) durch

$$\lambda_i := B(u_i) = \inf\left\{\frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in H, K(u, u_j) = 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq i-1\right\},$$

wobei $K(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq j \leq i$ gelte. Ist $W \subset H$ ein Unterraum, so definieren wir

$$d(W) := \inf\left\{\frac{B(u)}{K(u)} : 0 \neq u \in W^\perp\right\}.$$

Zeige, dass für $i \in \mathbb{N}_+$

$$\lambda_i = \max\{d(W) : W \subset H, W \text{ Unterraum}, \dim W \leq i-1\}$$

gilt und dass das Maximum in $W_0 := \langle u_1, \ldots, u_{i-1}\rangle$ angenommen wird.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ und sei λ_1 der erste Eigenwert des Laplace-Operators auf Ω. Sei $0 < \lambda < \lambda_1$. Zeige, dass das Minimierungsproblem

$$\lambda_0 := \inf\left\{\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda u^2\right) : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega (u^+)^{q+1} = 1\right\}$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Zeige weiterhin, dass $\lambda_0 > 0$ gilt und dass die Lösung u des Minimierungsproblems eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \lambda_0 u^q, & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

ist.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 12.06.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.