Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 8

Aufgabe 8.1. (8 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ und sei λ_1 der erste Eigenwert des Laplace-Operators auf Ω. Seien $\lambda, \mu > 0$. Wir nehmen an, dass eine schwache Lösung $u_\mu \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems

$$(*_\mu) := \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \mu u^q, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

existiert.

(i) Sei $\mu_0 > 0$ beliebig. Zeige, dass es auch eine Lösung $u_{\mu_0} \in H_0^1(\Omega)$ des Randwertproblems $(*_{\mu_0})$ gibt.
(ii) Zeige, dass fast überall $u_\mu \geq 0$ gilt.
(iii) Zeige, dass das Randwertproblem $(*_\mu)$ genau dann eine nicht-triviale Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, falls $\lambda < \lambda_1$ gilt.
(iv) Verwende die Calderon-Zygmund-Abschätzungen, um zu zeigen, dass $u_\mu \in W^{2,p}(\Omega)$ für alle $1 < p < \infty$ gilt.
(v) Verwende die Schauder-Abschätzungen, um zu zeigen, dass $u_\mu \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für alle $0 < \alpha < 1$ gilt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 19.06.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.