Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)
Sei $0 < T < \infty$ und

$$u \in C^2\left(\mathbb{R}^n \times (0,T)\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^n \times [0,T]\right).$$

Wir nehmen an, dass u das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

löst und dass es Konstanten a, $A > 0$ gibt, so dass

$$u(x,t) \le A \cdot e^{a|x|^2}$$

ist. Zeige, dass

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

gilt.
Hinweis: Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu > 0$. Zeige, dass

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} \cdot \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right)$$

die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

Aufgabe 9.2. (4 Punkte)
Zeige, dass zu dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{u} = \Delta u & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases}$$

eine nicht-triviale Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ existiert.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 26.06.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.