Oliver Schnürer, Universität Konstanz Sommersemester 2013
Matthias Makowski

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 10

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $T > 0$. Sei

$$F \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}), \quad F = F(x, t, z, p, r),$$

eine Funktion, so dass $\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ im ganzen Definitionsbereich eine positiv semi-definite Matrix ist. Seien $u, v \in C^{2;1}(\Omega \times (0, T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])$, so dass für alle $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}\right) > 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - F\left(x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j}\right) \le 0$$

und

$$u > v \text{ auf } \mathcal{P}(\Omega \times (0, T))$$

gelten. Zeige, dass dann $u > v$ auf $\Omega \times (0, T)$ gilt.

Aufgabe 10.2. (4 Punkte)
Seien $R, T > 0$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$. Seien $\Lambda, \Lambda_1 > 0$ gegeben und sei $\Lambda_0 := \Lambda + \Lambda_1 R$. Sei $I := (T, T + \frac{R^2}{4\Lambda_0})$. Seien $a^{ij}, b^i \in L^\infty(\Omega \times I)$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, mit $\operatorname{tr}(a^{ij}) \le \Lambda$, $|b| \le \Lambda_1$, wobei (a^{ij}) symmetrisch und positiv semi-definit sei. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \overline{I})$. Sei $u \in C^{2;1}(\Omega \times I) \cap C^0(\overline{\Omega} \times \overline{I})$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$Lu := -\dot{u} + a^{ij} u_{ij} + b^i u_i = f \text{ in } \Omega \times I.$$

Zeige: Falls eine Konstante $\omega > 0$ existiert, so dass für alle $x \in B_R(x_0), t \in I$

$$|u(x, t) - u(x_0, t)| \le \omega$$

gilt, dann gilt für alle $t \in I$

$$|u(x_0, t) - u(x_0, T)| \le 2\omega + \frac{2R^2}{\Lambda_0} \|f\|_{L^\infty(\Omega \times I)}.$$

Hinweis: Betrachte die Funktionen

$$v^\pm := \left(\|f\|_{L^\infty(\Omega \times I)} + \frac{2\alpha\Lambda_0}{R^2}\right)(t - T) + \frac{\alpha}{R^2}|x - x_0|^2 + \omega \pm (u - u(x_0, T)),$$

wobei

$$\alpha := \|u(x_0, \cdot) - u(x_0, T)\|_{L^\infty(I)}$$

sei.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 03.07.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.