Oliver Schnürer, Matthias Makowski — Universität Konstanz — Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen 1a

Blatt 11

Aufgabe 11.1. (8 Punkte)
Sei $T > 0$, $I := (0, T)$, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{I})$. Sei $u \in C^{3;1}(\Omega \times I) \cap C^0(\overline{\Omega} \times \overline{I})$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$Lu := -\dot{u} + \Delta u = f \text{ in } \Omega \times I.$$

Sei $M := \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Sei $\Omega' \Subset \Omega$ offen mit $d(\Omega', \partial\Omega) > \delta$. Sei $\delta > 0$. Zeige, dass es eine Konstante $c_0 = c_0(\delta, M, \|f\|_{C^1(\Omega \times I)})$ gibt, so dass

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega')} \le c_0$$

gilt.

Hinweis: Betrachte für geeignete Konstanten N, N_1 und Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \Omega$, $r \in \mathbb{N}$, die Funktion

$$v(x,t) := \left(t - \frac{\delta}{2}\right) \varphi(x) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)^2 + Nu^2 + e^{N_1\left(T - t + \frac{\delta}{2}\right)}$$

auf den Mengen $B_{\frac{\delta}{2}}(\xi_i) \times \left(\frac{\delta}{2}, T\right)$, $1 \le i \le r$, wobei

$$\varphi(x) := \left(\frac{\delta^2}{4} - \sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2$$

sei.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#PDE1a`
Abgabe: Bis Mittwoch, 10.07.2013, 10.00 Uhr, in der Vorlesung.